目　　录

第一章

凸集的基本性质

凸性的研究在许多数学分支中起着重要作用. 凸性与积分几何的关联尤为密切. 当人们用积分几何的许多一般性原理或公式去处理具有凸性的对象时，往往能得到一些十分优美的结果. 于是，凸性便成了积分几何有效性的实证领域；反转过来说，积分几何则是探讨凸性的一种有力工具.

本章扼要介绍平面凸集的基本概念及其基本性质.

§1.1 基本概念

1.1.1 凸集与凸曲线

设 K 为欧氏平面 E_2 上一子集. 如果当 $A\in K$ 和 $B\in K$ 时，连结 A、B 二点的线段也属于 K，则称 K 为凸集. 具有内点之凸集的边界称为凸曲线. 凸集 K 的边界常记为 ∂K，∂K 的长度称为凸集 K 的周长.

1.1.2 支持线及其存在性

设 K 为凸集，$P\in\partial K$. 若 L 是过 P 点的这样一条直线，它使得 K 完全位于由 L 划分 E_2 所形成的二闭半平面之一当中，我们就称 L 是凸集 K 过 P 点的支持线. 点 P 称为支持线 L 与凸集 K 的接触点.

定理 过凸集的任一边界点至少有一条支持线. 设 K 为凸集, $P\in\partial K$, 则过点 P 至少有一条 K 的支持线.

证明 如果 K 无内点, 结论是显然的. 现设 Q 为 K 的一个内点, l 是从点 Q 出发而经过点 P 的射线, 并将此射线自 P 起的那部分记为 l'. 显然, P 为 l' 与 K 的仅有的交点. 因为倘若 l' 上另有某点 Q' 竟然在 K 之中, 不难看出 P 将成为 K 之内点, 从而与 P 为界点之假设相矛盾.

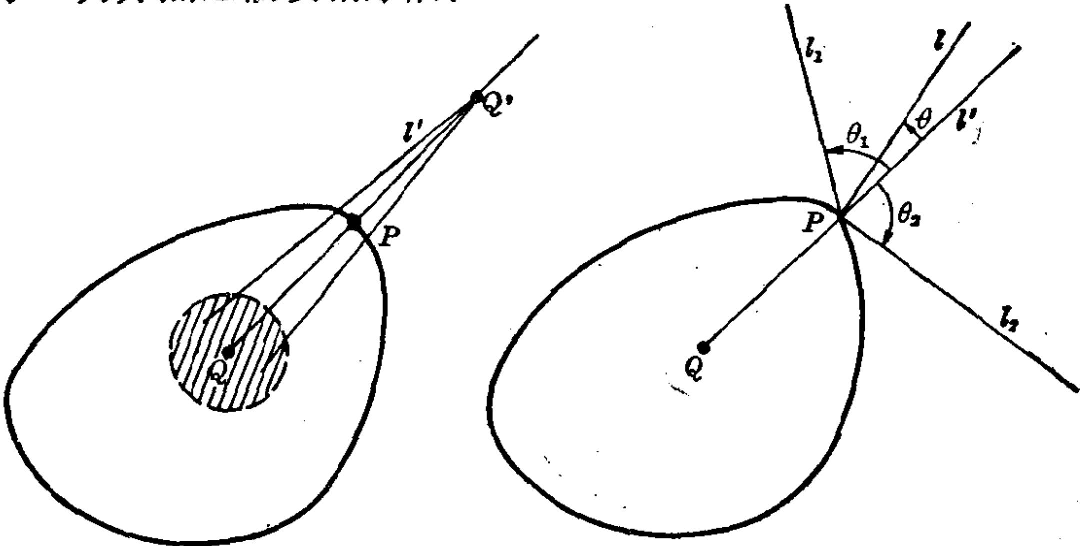


图 1-1

自 P 引这样一些射线 l: l 与 K 除 P 以外无其他公共点. l' 到 l 的角记为 θ. 集 $\{\theta\}$ 的上确界记为 θ_1, 相应的射线记作 l_1. 另一侧照此办理, 得射线 l_2. 倘能证明 l_1, l_2 的夹角 $\alpha\geqslant\pi$, 则定理的证明便完成. 事实上, 若设 $\alpha<\pi$, 可取 $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$ 致 $\alpha+\varepsilon_1+\varepsilon_2<\pi$, 得 l_1' 与 l_2' 构成之角域, 循此继进可推知 P 为 K 之内点, 导致矛盾.

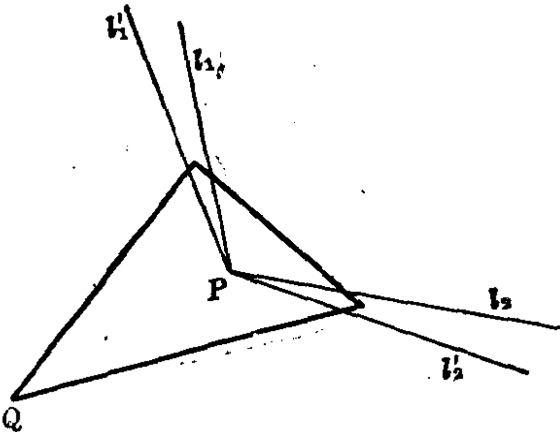


图 1-2

以上证明过程实际上是 Hahn-Banach 定理证明要点的几何复述(见 Spivak[1]).

过凸集 K 的界点有多于一条支持线的情况是存在的，这样的界点称为 ∂K 的角点. 可以证明，凸曲线的角点至多为可数多个. 非角点处的支持线即曲线在该点处之切线.

§1.2 凸集的支持函数和宽度函数

1.2.1 直线的广义法式

设 xOy 为平面上直角坐标系. OR 为自原点引出之射线，由 Ox 轴到射线 OR 的角记为 ϕ. G 为垂直于射线 OR 的任一条直线. 若 G 与 OR 交于 H，规定 $p=\overline{OH}$（O 到 H 的距离），特别说来，若 H 与原点 O 重合则 $p=0$；若 G 与 OR 的反向延线交于 H，则规定 $p=-\overline{OH}$. 显然，在这样的规定下，G 的方程为

$$x\cos\phi+y\sin\phi-p=0. \tag{1.2.1}$$

方程(1.2.1)的形式与通常的法式一样，但参数 p, ϕ 之意义不同. 我们称(1.2.1)为直线 G 的*广义法式方程*，并简记为 $G(p,\phi)$；它比传统的法式有更良好的适应性.

此外，在有必要考虑直线的方向时，我们总是约定 Ox 到 $G(p,\phi)$ 的角为 $\phi+\frac{\pi}{2}$.

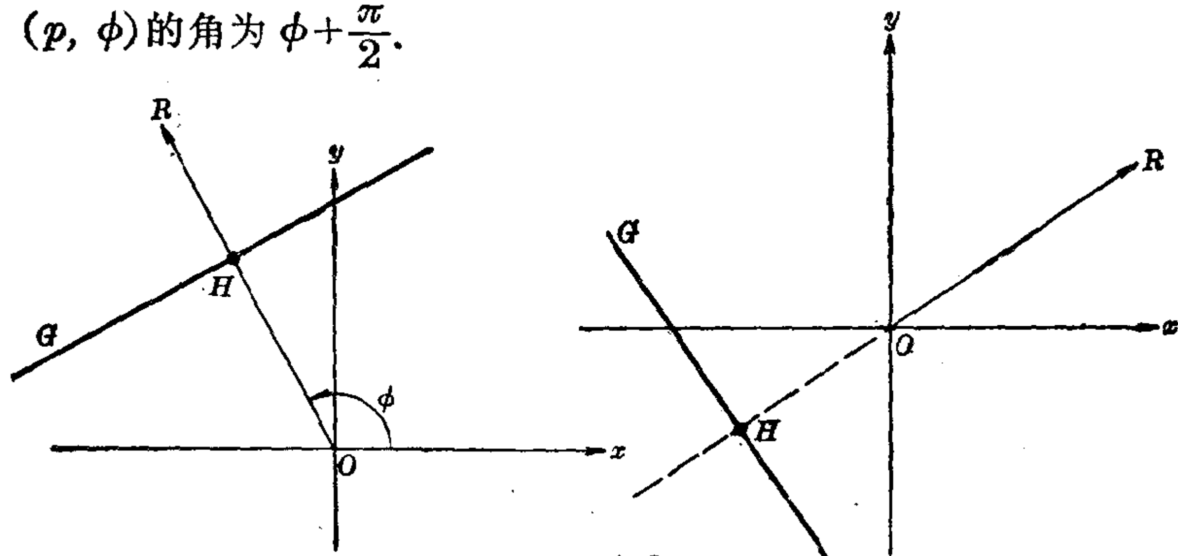


图 1-3

1.2.2 凸集的支持函数与宽度函数

设 K 为有界闭凸集（亦称凸域），在平面上任意选取坐标系

xOy. 自原点 O 引射线 OR. 作垂直于 OR 且与 K 相遇的任一直线 $G_1(p_1, \phi)$. 集 $\{p_1\}$ 之上确界记为 p, 即

$$p=\sup\{p_1: G_1(p_1, \phi)\cap K\neq\emptyset\}, \tag{1.2.2}$$

其中记号 $G_1\cap K\neq\emptyset$ 表示"G_1 与 K 的交为非空", 即 G_1 与 K 相交的意思. 与(1.2.2)式中 p 相应的直线 $G(p, \phi)$ 显然为 K 的支持线, 称为 K 沿 ϕ 方向的支持线. 函数 $p(\phi)$ 称为凸集 K 的支持函数. 又, 引进函数

$$w(\phi)=p(\phi)+p(\phi+\pi), \tag{1.2.3}$$

则显然可见, $w(\phi)$ 是对应于方向 ϕ, $\phi+\pi$ 的二平行支持线间的距离, 称之为凸集 K 沿 ϕ 方向的宽度. 函数 $w(\phi)$ 称为凸集 K 的宽度函数.

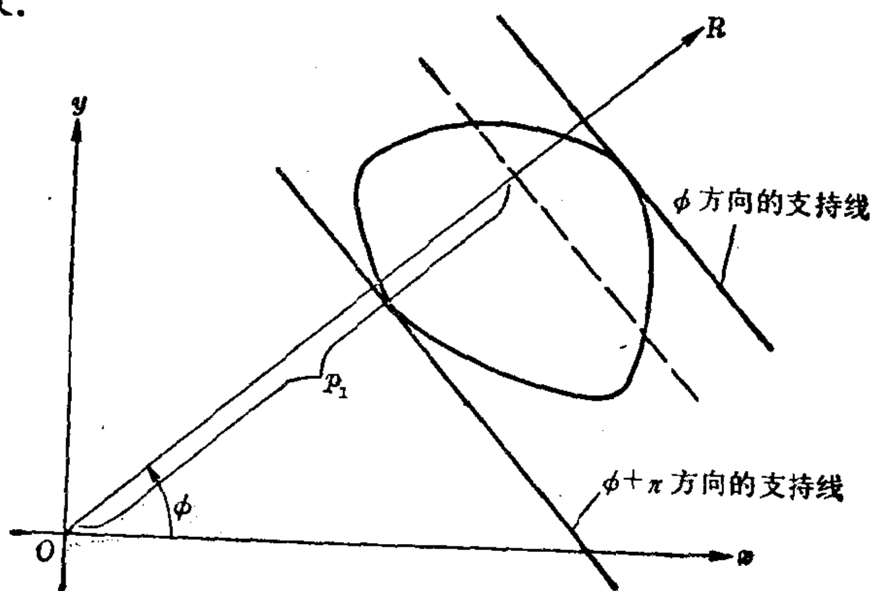


图 1-4

1.2.3 凸曲线作为直线族的包络

设凸集 K 的边界 ∂K 属于 C^2 类. 凸集 K 的所有支持线构成一单参数直线族, ∂K 可视为此直线族的包络. 据此可导出用支持函数表达凸集的周长和面积的公式.

设 K 的支持函数为 $p(\phi)$, 则支持线族之方程为

$$x\cos\phi+y\sin\phi-p(\phi)=0. \tag{1.2.4}$$

微分一次, 得

$$-x\sin\phi+y\cos\phi-p'(\phi)=0. \tag{1.2.5}$$

由(1.2.4)和(1.2.5)二式得到包络(即∂K)的参数方程

$$x=p\cos\phi-p'\sin\phi,\quad y=p\sin\phi+p'\cos\phi, \tag{1.2.6}$$

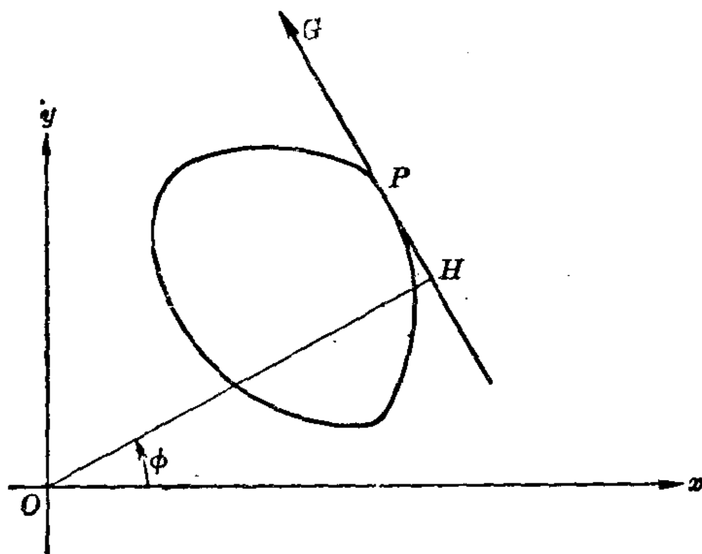


图 1-5

式中(x, y)即支持线$G(p, \phi)$与K的接触点P之坐标. 按照我们在1.2.1段曾经申明过的约定在G上取好正向. H的坐标为$(p\cos\phi, p\sin\phi)$. 易知从H到P的有向线段在轴G上的值为

$$HP=p'. \tag{1.2.7}$$

如所周知[2],一条简单闭曲线是凸曲线的充要条件是: 在曲线适当的定向下,它的曲率恒为非负. 假定已经选定这样的定向,那么,由(1.2.6)式,有

$$ds=(p+p'')d\phi,\quad \rho=p+p''>0, \tag{1.2.8}$$

其中$\rho=p+p''$为曲率半径;反过来,若$p(\phi)$为属于C^2类的以2π为周期的周期函数,且$p+p''>0$ $(0\leqslant\phi<2\pi)$,则$p(\phi)$必定是某凸集的支持函数. 综合起来说,以2π为周期的周期函数$p(\phi)$是一个凸集的支持函数的充要条件是

$$p(\phi)+p''(\phi)>0,\quad 0\leqslant\phi<2\pi. \tag{1.2.9}$$

这一结论下面还要用到.

利用$ds=(p+p'')d\phi$,立即可得关于凸集周长的Cauchy公式:

$$L=\int_0^{2\pi}p(\phi)\,d\phi, \tag{1.2.10}$$

其中 L 为凸集的周长. 再由 (1.2.3) 式, 便得到用宽度函数表示的周长公式:

$$L=\int_0^{\pi} w(\phi)\, d\phi. \tag{1.2.11}$$

另外, 还可以用支持函数表达凸集 K 的面积 F. 为避免出现"负面积", 暂将确定支持函数的参考点 O 选在 K 内. 这时显见 $\frac{1}{2}pds$ 为面积元, 故有

$$F=\frac{1}{2}\int_{\partial K} p\, ds=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p(p+p'')\, d\phi, \tag{1.2.12}$$

或

$$F=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p^2-p'^2)\, d\phi. \tag{1.2.13}$$

由于本书中直线方程采用广义法式, 并与此相应地规定了支持函数, 参考点 O 既可以选在 K 内也可以置于 K 外. 但是上述讨论, 包括周长、面积公式及条件 $p+p''>0$, 均不受影响. 为了说明这一点, 显然考虑坐标系的平移已足够. 假设 xOy 平移至 $x_1O_1y_1$, O_1 的坐标为 (a, b). 凸集 K 关于 xOy, $x_1O_1y_1$ 的支持函数分别记为 $p(\phi)$, $p_1(\phi)$, 则

$$p_1(\phi)=p(\phi)-a\cos\phi-b\sin\phi. \tag{1.2.14}$$

于是有

$$p_1+p_1''=p+p'',$$

$$\int_0^{2\pi} p_1(\phi)\, d\phi=\int_0^{2\pi}[p(\phi)-a\cos\phi-b\sin\phi]\, d\phi=\int_0^{2\pi} p(\phi)\, d\phi,$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p_1(p_1+p_1'')\, d\phi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[p(\phi)-a\cos\phi-b\sin\phi](p+p'')d\phi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p(p+p'')\, d\phi.$$

1.2.4 周长公式的初等证明[3]

设 K 为有界闭凸集, 宽度函数为 $w(\phi)$. 为证明周长公式 (1.2.11), 视 ∂K 为一串由支持线构作的多边形之极限. 用对应于方向 $\phi=k\frac{2\pi}{2^{n+1}}$ $(k=0, 1, \cdots, 2^{n+1}-1)$ 的诸支持线构成 2^{n+1}

边形($n=1, 2, \cdots$)，其周长记为 S_n. 当 $n=1$ 时,

$$S_1=2\left[w(0)+w\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]. \tag{1.2.15}$$

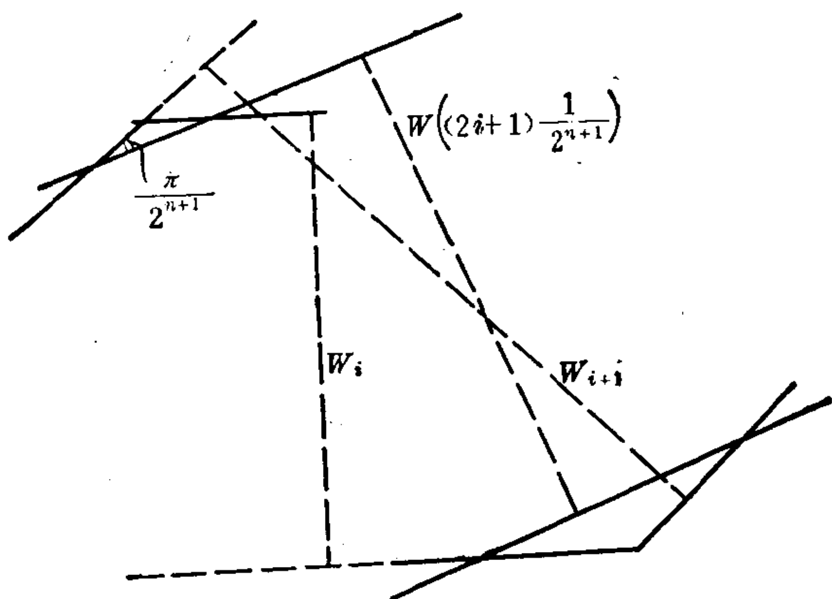


图 1-6

不难用数学归纳法证明:

$$S_n=2\sum_{i=0}^{2^n-1} w\left(i\frac{\pi}{2^n}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}. \tag{1.2.16}$$

事实上,当 $n=1$ 时,(1.2.16)式成立(即(1.2.15)式). 而 S_{n+1} 可计算如下:

$$s_{n+1}=2\sum_{i=0}^{2^n-1} w\left(i\cdot\frac{\pi}{2^n}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$+2\sum_{i=0}^{2^n-1}\left\{\left[w\left(i\frac{\pi}{2^n}\right)+w\left((i+1)\frac{\pi}{2^n}\right)\right]\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^n}}\right.$$

$$\left.-w\left((2i+1)\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right\}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2^{n+1}}-\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\right)$$

$$=2\sum_{i=0}^{2^n-1} w\left(i\frac{\pi}{2^n}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}-\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}\right)$$

$$+2\sum_{i=0}^{2^n-1} w\left((2i+1)\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

$$=2\sum_{i=0}^{2^n-1} w\left(2i\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}+2\sum_{i=0}^{2^n-1} w\left((2i+1)\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

$$=2\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} w\left(i\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}},$$

从而证明了 (1.2.16) 式．于是

$$L=\lim_{n\to\infty} S_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^n}}\sum_{i=0}^{2^n-1} w\left(i\frac{\pi}{2^n}\right)\frac{\pi}{2^n}=\int_0^\pi w(\phi)\,d\phi.$$

证明过程中，对 ∂K 的光滑性未作任何要求．实际上，去掉 $\partial K\in C^2$ 之假定，1.2.3 段的所有结论仍然成立，这里就不再一一赘述了．

§1.3 某些特殊凸集

1.3.1 常宽凸集

设凸集 K 的宽度函数为 $w(\phi)$． 若 $w(\phi)\equiv D$ (常数)，则称 K 为常宽凸集，常数 D 称为 K 的宽度．由公式 (1.2.11) 立即可知

$$L=\int_0^\pi D\,d\phi=\pi D, \tag{1.3.1}$$

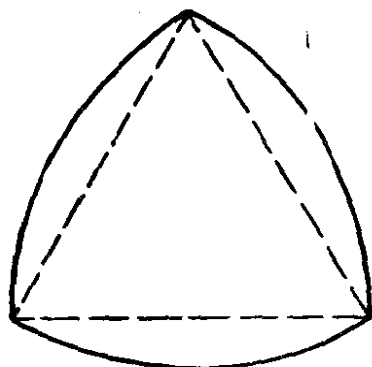


图 1-7

即宽度为 D 的常宽凸集之周长与直径为 D 的圆之周长相等．首先发现这一事实的是 Barbier(1860)． 不同于圆的常宽凸集确实是存在的． 例如．所谓 Reuleaux 多边形便是． 下图是 Reuleaux 三角形：以边长为 a 的正三角形的每个顶点为圆心作弧，便得到一宽度为 a 的常宽凸集． 对正 $(2n+1)$ 边形亦可照此办理．

给定一个正数 D，它对应着一类凸集(以 D 为宽度的所有常宽凸集). 同样，彼此不全等的凸集可以具有相同的宽度函数. 而由公式(1.2.11)，二凸集只要宽度函数相同就必然有相等的周长. 另一方面，凸集由其支持函数所唯一确定(吴大任[4]，第287页，就凸集边界为卵形线情形给出了此论断的详细证明). 从这个意义上说，用宽度函数表示周长的公式比用支持函数表示周长的公式更具实质含义.

1.3.2 平行凸集

设 K 为凸集. 以 K 的每一点为圆心、以 r 为半径作圆，这些圆之并集称为 K 的间距为 r 的外平行集，记为 K_r. 其边界 ∂K_r 称为 ∂K 的外平行曲线. 外平行曲线 ∂K_r 也可以看作是这样一族圆的包络：圆的半径为 r，圆心在 ∂K 上流动. 显然，若 K 的支持函数为 $p(\phi)$，则 K_r 的支持函数为 $p(\phi)+r$. 以 L_r、F_r 表示 K_r 的周长和面积，则有

$$L_r=L+2\pi r,\quad F_r=F+Lr+\pi r^2. \tag{1.3.2}$$

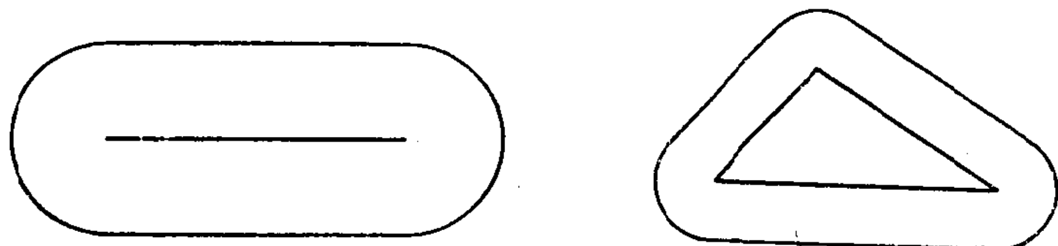


图 1-8

如果 r 不大于 ∂K 的曲率半径的最小值，可按下述方式定义内平行集 K_{-r}：与 ∂K 内切的半径为 r 的圆，沿 ∂K 滚动一周，其圆心所围成的集. 内平行集的支持函数为 $p(\phi)-r$，其周长、面积为

$$L_{-r}=L-2\pi r,\quad F_{-r}=F-Lr+\pi r^2. \tag{1.3.3}$$

§1.4 Minkowski 混合面积

1.4.1 混合凸集的定义

设 K_1, K_2 为二凸集，它们分别关于参考点 O_1, O_2 的支持函

数为 $p_1(\phi)$, $p_2(\phi)$. 设 $p_1, p_2 \in C^2$. 考虑函数 $p(\phi)=p_1(\phi)+p_2(\phi)$. 由于 $p+p''=(p_1+p_1'')+(p_2+p_2'')>0$, 故 $p(\phi)$ 必为某凸集的支持函数. 以 $p(\phi)=p_1(\phi)+p_2(\phi)$ 为支持函数的这个凸集称为 K_1 与 K_2 的混合凸集,并记为 K_{12}.

1.4.2 Minkowski 混合面积

现在我们来推导混合凸集 K_{12} 的周长和面积公式. K_{12} 的周长 L 显然为

$$L=\int_0^{2\pi}(p_1+p_2)\,d\phi=L_1+L_2, \tag{1.4.1}$$

其中 L_1, L_2 分别为 K_1, K_2 的周长.

由公式 (1.2.13), K_{12} 的面积应为

$$\begin{aligned}
F&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p^2-p'^2)\,d\phi\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p_1^2-p_1'^2)\,d\phi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p_2^2-p_2'^2)\,d\phi\\
&\quad+\int_0^{2\pi}(p_1p_2-p_1'p_2')\,d\phi\\
&=F_1+F_2+\int_0^{2\pi}(p_1p_2-p_1'p_2')\,d\phi\\
&=F_1+F_2+2F_{12},
\end{aligned} \tag{1.4.2}$$

其中 F_{12} (或记为 F_{21}) 表示

$$F_{12}=F_{21}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p_1p_2-p_1'p_2')\,d\phi, \tag{1.4.3}$$

称为凸集 K_1 与 K_2 的 Minkowski 混合面积.

分部积分,并利用 (1.2.8) 式,有

$$F_{12}=F_{21}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p_1(p_2+p_2'')\,d\phi=\frac{1}{2}\int_{\partial K_2}p_1\,ds_2, \tag{1.4.4}$$

或

$$F_{12}=F_{21}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p_2(p_1+p_1'')\,d\phi=\frac{1}{2}\int_{\partial K_1}p_2\,ds_1. \tag{1.4.5}$$

与1.2.3段末所讲的道理一样,混合面积 F_{12} 与参考系 $x_1O_1y_1$, $x_2O_2y_2$ 的平移无关.

关于旋转其结果会是怎样？让 K_1 绕 O_1 旋转角度 θ，至位置 K_1^*（亦可代之以考虑坐标系的旋转）. 此时 K_1^* 关于 $x_1O_1y_1$ 之支持函数应为 $p_1(\phi-\theta)$，于是 K_1^* 与 K_2 之混合面积为

$$F_{12}(\theta)=\int_{\partial K_2} p_1(\phi-\theta)ds_2. \qquad (1.4.6)$$

$K_{12}(\theta)$ 一般是依赖于 θ 的. 但有

$$\int_0^{2\pi} K_{12}(\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\int_{\partial K_2} p_1(\phi-\theta)ds_2\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\partial K_2}\left[\int_0^{2\pi} p_1(\phi-\theta)d\theta\right]dS_2=\frac{1}{2}L_1L_2. \qquad (1.4.7)$$

上一节讲的外平行凸集，实际上相当于一凸集与圆的混合凸集.

§1.5 单位球面面积和单位球体体积公式

以 O_n 表示 n 维单位球面的面积，$\varkappa_n$ 表示 n 维单位球体体积. 关于 O_n 和 $\varkappa_n$ 的公式，本书后面经常要用到，兹录以备考.

$$O_n=\frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},\quad \varkappa_n=\frac{O_{n-1}}{n}=\frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \qquad (1.5.1)$$

其中 Γ 为 Γ 函数，有熟知的递推关系

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n), \qquad (1.5.2)$$

特别地，当 n 为非负整数时，$\Gamma(n+1)=n!$. 又，

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \qquad (1.5.3)$$

顺便提醒一下，所谓“n 维单位球面”或“n 维单位球体”均是指它们本身的维数，而不是外围空间的维数. 例如，平面上的圆周是 1 维球面，3 维空间中的球面是 2 维球面，等等；Ox 轴上的区间 [−1, 1] 是 1 维球体，平面上的单位圆盘是 2 维球体，等等.

关于公式 (1.5.1) 的推导，例如可参考 Apostol[5].

本章参考文献

[1] M. Spivak, «A Comprehensive Introduction to Differential Geometry», Vol. II, Berkely, 1979.

[2] 陈省身、陈维桓,《微分几何讲义》,北京大学出版社, 1983.

[3] 任德麟,"关于凸集的宽度函数的几点注记", 1959(未发表).

[4] 吴大任,《微分几何讲义》,人民教育出版社, 1981, 第4版.

[5] Tom M. Apostol, «Calculus», Vol. II, John Wiley & Sons, 1969.

第二章

平面上几何元素集的测度

积分几何与几何概率理论的一个基本概念，就是给几何元素集定义一种在某种变换群下不变的测度．这里所谓的几何元素集，具体说来，可以是点集、直线集、点偶集、带域集等等．所谓变换群，可以选用欧氏运动群、仿射变换群或其他更一般的变换群．在目前以及此后的两章中我们限于选用平面上的欧氏运动群．

本章介绍几种常见的几何元素集的测度及其简单的应用．

§2.1 点集的测度

2.1.1 点集的测度

设 (x, y) 表示点的直角坐标．点集 X 的测度 $m(X)$ 按如下之方式加以规定：考虑微分形式 $\omega=f(x, y)dx\wedge dy$ 在集 X 上的勒贝格积分，并要求选取函数 f 致此积分值关于平面上运动群为不变．这个积分值称为点集 X 的测度，记为 $m(X)$．

现在我们就按照上述要求来确定函数 f．以 $\mathfrak{M}$ 表示平面运动群．设 $u\in\mathfrak{M}$ 为一运动．在直角坐标系下，u 可表示为

$$u:\ \begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha+a, \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha+b, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

其中 a, b, α 称为运动 u 的参数；a, b 为 u 的平移分量，α 为 u 的旋转分量．运动 u 有时记作 $u(a, b;\alpha)$．设点集 X 在 u 的作用下

变换为 X', 即 $X'=uX$. 根据 (2.1.1), 有

$$dx'\wedge dy'=dx\wedge dy,$$

从而

$$\begin{aligned}m(X')&=\int_{X'}f(x',y')dx'\wedge dy'\\&=\int_X f(x',y')dx\wedge dy.\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

另一方面,

$$m(X)=\int_X f(x,y)dx\wedge dy.\tag{2.1.3}$$

按要求应有 $m(X)=m(X')$, 即

$$\int_X f(x',y')dx\wedge dy=\int_X f(x,y)dx\wedge dy.\tag{2.1.4}$$

由于此等式应当对于任何集 X 成立,从而推知

$$f(x,y)=f(x',y').\tag{2.1.5}$$

又因 $\mathfrak{M}$ 是可迁群, 即借助于运动可以把点 (x, y) 变为任意的另一点 (x', y'), 因此从 (2.1.5) 式推知 $f(x, y)$ 必为常数. 取此常数等于 1, 则有:

平面上点 $P(x, y)$ 的集 X 关于运动群 $\mathfrak{M}$ 为不变的测度等于微分形式

$$dP=dx\wedge dy\tag{2.1.6}$$

在集 X 上的勒贝格积分(假定此积分存在),即

$$m(X)=\int_X dx\wedge dy.\tag{2.1.7}$$

若不计一个常数因子, 它是关于平面运动群不变的唯一的测度. 微分形式 (2.1.6) $dP=dx\wedge dy$ 称为*点的密度*.

2.1.2 几点注记

1. 关于微分形式和外积的简单说明

刚才提到的密度 $dP=dx\wedge dy$, 叫做*微分形式*或*外微分形式*, 其中运算记号"$\wedge$"是外乘法记号, 外乘的结果称为外积. 第五章中我们将对此作较为系统的阐述. 若限于平面情形, 可作如下浅显的说明. 所谓 1 级和 2 级微分形式, 就是指线积分和二重积分

的被积表达式．微分形式作外积的规则是：

(a) 如果至少有两个因子彼此相等，则这些微分形式的外积为零；

(b) 经偶数次因子置换后乘积不变，经奇数次因子置换后乘积变号．

例如，计算

$$dx=x_u du+x_v dv,\ \ dy=y_u du+y_v dv$$

的外积，利用关系

$$du\wedge du=0,\ \ dv\wedge dv=0,\ \ dv\wedge du=-du\wedge dv$$

则有
$$dx\wedge dy=(x_u y_v-x_v y_u)du\wedge dv.$$

由此可见，若采用外乘法，则变量替换过程中雅可比行列式的出现已被自动地照顾到了，这在大多数场合是极为便利的．

2．对函数 f 和集 X 的补充假定

实分析中有下列结论："设 $g\in\mathscr{L}(\mu)$，且对于每个具有有限测度的可测集 A 有

$$\int_A g\,d\mu=0,$$

则 g 几乎处处等于零"．在前面由 (2.1.4) 式到(2.1.5)式的推理中，暗中运用了这一结论．因此我们理应补充假定 X 为具有有限测度的可测集，并设 $f\in\mathscr{L}(\mu)$．关于 $\mathscr{L}(\mu)$ 的定义以及刚才援引的结论详见 S. Lang[1]．

3．在积分几何中，约定仅考虑非负密度．例如，点的密度本应记为 $dP=|dx\wedge dy|$，但绝对值号一般从略．

2.1.3 一个积分公式

在不同的坐标系下，点的密度的形式亦有所不同．据此可导出一些积分公式．

设 K_1, K_2 为二有界凸集，各自关于参考点 O_1, O_2 的支持函数为 $p_1(\phi)$ 和 $p_2(\phi)$．假定二凸集的边界皆不出现直线段组成部分，从而任一支持线与凸集的边界只有一个接触点(或称支持点)．

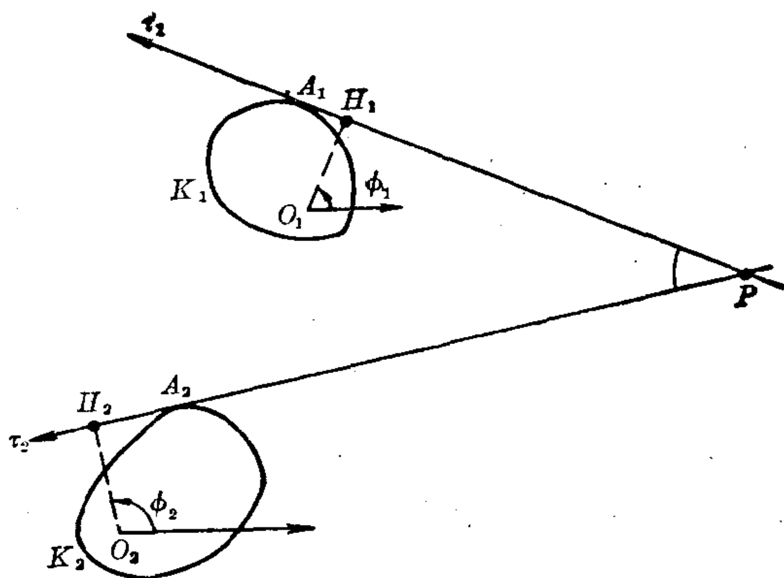


图 2-1

如图 2-1，设 $\tau_i=\phi_i+\pi/2$ $(i=1, 2)$ 为垂直于 ϕ_i 方向的支持线的方向．于是支持线的方程为

$$(x-x_i)\sin\tau_i-(y-y_i)\cos\tau_i-p_i=0,\ \ i=1,\ 2; \tag{2.1.8}$$

其中 $(x_i,\ y_i)$ 为 O_i 的坐标．

方程组 (2.1.8) 的解即二支持线交点 P 的坐标，它们通过 (2.1.8) 式与 τ_1，τ_2 相联系．前面已知点 P 的密度为 $dP=dx\wedge dy$，以下我们设法用 τ_1，τ_2 表示 dP．微分 (2.1.8) 式，有

$$\begin{aligned}&\sin\tau_i\,dx+(x-x_i)\cos\tau_i\,d\tau_i-\cos\tau_i\,dy\\&\qquad+(y-y_i)\sin\tau_i\,d\tau_i-dp_i=0,\ i=1,\ 2.\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

如图所示，易知

$$(x-x_i)\cos\tau_i+(y-y_i)\sin\tau_i=-PH_i. \tag{2.1.10}$$

又，由 (1.2.7) 式有

$$\frac{dp_i}{d\phi_i}=\frac{dp_i}{d\tau_i}=H_iA_i. \tag{2.1.11}$$

将 (2.1.10) 和 (2.1.11) 二式代入 (2.1.9) 式，并将 P 到接触点 A_i 的距离记为 t_i，即 $t_i=\overline{PA_i}$，则有

$$\sin\tau_i\,dx-\cos\tau_i\,dy=t_i\,d\tau_i,\ \ i=1,\ 2. \tag{2.1.12}$$

现将 (2.1.2) 中二式作外积，则有

$$dP=\frac{t_1 t_2}{\sin(\tau_2-\tau_1)}d\tau_1\wedge d\tau_2, \qquad (2.1.13)$$

或

$$d\tau_1\wedge d\tau_2=\frac{\sin(\tau_2-\tau_1)}{t_1 t_2}dP. \qquad (2.1.14)$$

考虑 (2.1.14) 双方之积分(积分域由一切可能的 τ_1, τ_2 组成). 左方积分的结果显然为 $4\pi^2$. 至于右方，我们注意自 K_1, K_2 外任意一点 P 对 K_1, K_2 可各引两条支持线. 以 τ_1, τ_1', τ_2, τ_2' 记这些支持线的方向，从 P 到各个相应接触点的距离记为 t_1, t_1', t_2, t_2', 各相应方向间的夹角记为 (τ_1, τ_2), (τ_1, τ_2'), (τ_1', τ_2), (τ_1', τ_2'). 从而可得积分公式:

$$\int_{P\in K_1\cup K_2}\left[\frac{\sin(\tau_1, \tau_2)}{t_1 t_2}+\frac{\sin(\tau_1, \tau_2')}{t_1 t_2'}+\frac{\sin(\tau_1', \tau_2)}{t_1' t_2}+\frac{\sin(\tau_1', \tau_2')}{t_1' t_2'}\right]dP=4\pi^2. \qquad (2.1.15)$$

令 K_1 与 K_2 重合为一个凸集 K, 则得上述公式之特款:

$$\int_{P\in K}\frac{\sin\omega}{t t'}dP=2\pi^2. \qquad (2.1.16)$$

公式(2.1.15)及其特款(2.1.16)对任何有界凸集都成立. 由此不难想象这些公式的丰富的内涵.

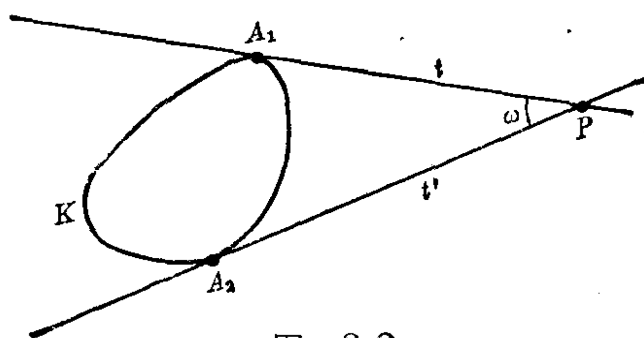


图 2-2

§2.2 直线集的测度

2.2.1 直线集的测度

本节中我们来规定直线集的测度，其原则和方法与关于点集

的讨论完全类似.

设有直线

$$G:\ x\cos\phi+y\sin\phi-p=0 \tag{2.2.1}$$

之集 X. 直线集 X 的测度 $m(X)$ 由积分

$$m(X)=\int_X f(p,\ \phi)dp\wedge d\phi \tag{2.2.2}$$

所定义,要求选取函数 f 致此测度关于平面运动群 $\mathfrak{M}$ 不变.

在运动 $u(a,\ b;\alpha)$(见(2.1.1)式)作用下,由(2.2.1)式表示的 $G(p,\ \phi)$ 变为直线

$$\begin{aligned}G':\ &x\cos(\phi+\alpha)+y\sin(\phi+\alpha)-a\cos(\phi+\alpha)\\&-b\sin(\phi+\alpha)-p=0,\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

即

$$\begin{cases}p'=a\cos(\phi+\alpha)+b\sin(\phi+\alpha)+p,\\ \phi'=\phi+\alpha.\end{cases} \tag{2.2.4}$$

由此可见 $dp'\wedge d\phi'=dp\wedge d\phi$. 设 $X'=uX$, 我们有

$$m(X')=\int_{X'}f(p',\ \phi')dp'\wedge d\phi'$$

$$=\int_X f(a\cos(\phi+\alpha)+b\sin(\phi+\alpha)+p,\ \phi+\alpha)dp\wedge d\phi. \tag{2.2.5}$$

另一方面,

$$m(X)=\int_X f(p,\ \phi)dp\wedge d\phi.$$

由于要求对于任何 X 有 $m(X')=m(X)$, 以及运动群的可迁性, 推知

$$f(p,\ \phi)=\text{const.},$$

不妨取此常数等于 1, 我们有:

直线 $G(p,\ \phi)$ 之集 X 关于 $\mathfrak{M}$ 为不变的测度,由微分形式

$$dG=dp\wedge d\phi \tag{2.2.6}$$

在集 X 上的勒贝格积分(假定此积分存在)给出,即

$$m(X)=\int_X dp\wedge d\phi.$$

若不计一个常数因子,它是关于平面运动群不变的唯一的测度.微分形式(2.2.6)称为**直线的密度**.

2.2.2 两个推论

作为直线密度(2.2.6)式的直接应用，让我们利用它推导两个简单而重要的公式.

论推 1 设 K 是周长为 L 的有界凸集. 考虑密度 $dG=dp\wedge d\phi$ 在一切与 K 相交之直线组成的直线集 $\{G: G\cap K\neq\phi\}$ 上的积分，得此直线集之测度

$$\int_{G\cap K\neq\emptyset} dG=\int_{G\cap K\neq\emptyset} dp\wedge d\phi=\int_0^{2\pi} p(\phi)d\phi=L. \qquad (2.2.7)$$

推论 2 设 K 为有界凸集，面积为 F. σ 表示 G 在 K 上截出的弦长，则有 Crofton 公式:

$$\int_{G\cap K\neq\emptyset} \sigma\, dG=\pi F. \qquad (2.2.8)$$

事实上，若固定 ϕ, $0\leqslant\phi<\pi$, 先考虑面积元 σdp 之积分，然后再对 ϕ 从 0 到 π 积分，便得到(2.2.8)式. 注意，若 p, ϕ 仍看作是经典的法坐标，则第一次积分应就固定的 ϕ 及 $\phi+\pi$ 考虑. 由此也可见采用广义法式的便利.

公式(2.2.7)可以通俗地理解为：与凸集 K 相遇的直线的“根数”恰好等于 K 之周长. 由 (2.2.7) 可直接导致如下简单的几何概率结果:

设凸集 K_1, K_2 的周长分别为 L_1, L_2. 又，$K_1\subset K_2$. 若已知 G 与 K_2 相遇，则 G 复与 K_1 相遇之概率为 L_1/L_2.

由(2.2.7)和 (2.2.8) 二式还可直接看出凸集 K 的平均弦长应为

$$E(\sigma)=\int_{G\cap K\neq\emptyset} \sigma\, dG\Big/\int_{G\cap K\neq\emptyset} dG=\pi F/L. \qquad (2.2.9)$$

2.2.3 直线密度的另外一些形式

若直线 G 不是由(2.2.1)式给出，而是取另外的形式，即直线以另外的某二参数作为坐标，则我们可以利用这些参数与 p, ϕ 之间的变换式，由已知的密度形式 (2.2.6) 导出相应的新的密度形

式.

1. 如图，设 G 由 θ 及横截距 x 所确定，则显然有

$$p=x\sin\theta,\ \ \phi=\theta-\pi/2,$$

从而有

$$dG=\sin\theta\, dx\wedge d\theta. \tag{2.2.10}$$

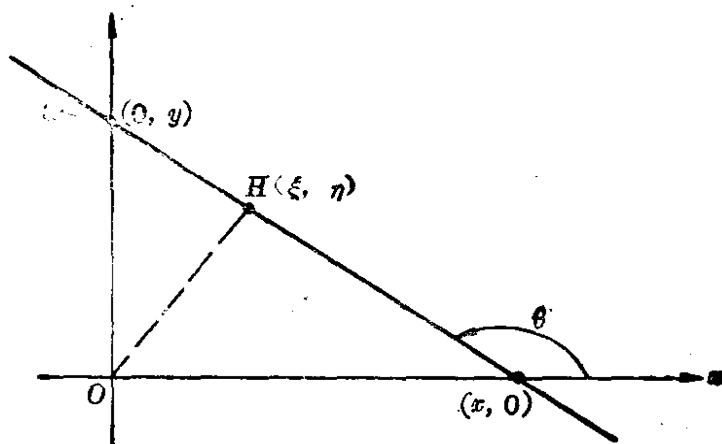


图 2-3

2. 若 G 由其横截距 x、纵截距 y 所决定，则

$$dG=\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\wedge dy. \tag{2.2.11}$$

3. 若 G 之方程取形式 $ux+vy+1=0$. 以 u, v 作为 G 之坐标，则有

$$dG=\frac{du\wedge dv}{(u^2+v^2)^{3/2}}. \tag{2.2.12}$$

4. 如图 2-3, 若取 ξ, η 作为 G 之坐标，则有

$$dG=\frac{d\xi\wedge d\eta}{(\xi^2+\eta^2)^{1/2}}. \tag{2.2.13}$$

5. 设 C 为逐段可微曲线，由参数式

$$x=x(s),\ \ y=y(s) \tag{2.2.14}$$

给出，s 为弧长. 假定直线 G 与曲线 C 相交于点 (x, y), G 与 C 在 (x, y) 处之切线间的角为 θ. (s, θ) 可视为 G 之坐标. 今求以 s, θ 表示 dG 的表达式. 显然有

$$\phi=\theta+\tau-\pi/2 \tag{2.2.15}$$

其中 τ 为切线对 x 轴之倾角. 另一方面，对

$$p=x\cos\phi+y\sin\phi$$

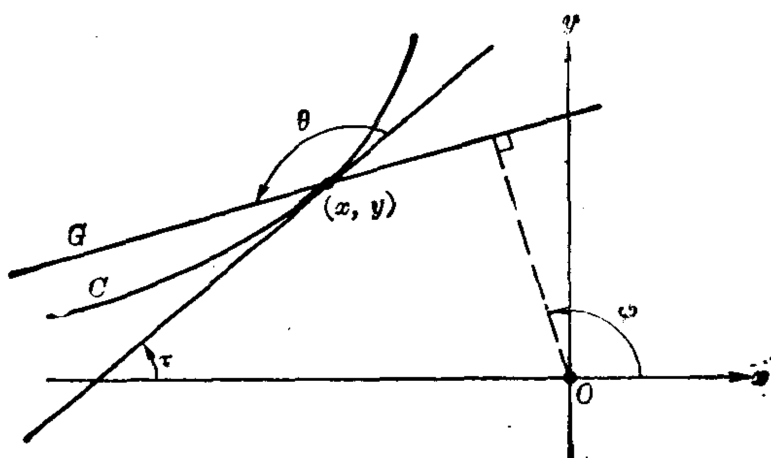


图 2-4

微分，得

$$dp=\cos\phi\,dx+\sin\phi\,dy+(-x\sin\phi+y\cos\phi)d\phi,$$

计及关系 $dx=\cos\tau\,ds,\ dy=\sin\tau\,ds$，则上式成为

$$dp=\cos(\phi-\tau)ds+(-x\sin\phi+y\cos\phi)d\phi.$$

将此式与 $d\phi$ 作外积，则有

$$dG=dp\wedge d\phi=\cos(\phi-\tau)ds\wedge d\phi.$$

再利用 (2.2.15) 式，$d\phi=d\theta+\tau' ds$，从而有

$$dG=\sin\theta\,ds\wedge d\theta. \tag{2.2.16}$$

2.2.4 等周不等式的证明

设 K 为有界凸集，其面积和周长分别为 F 和 L. 如图，设 G, G' 为二直线，它们与 K 的边界 ∂K 之交点对应于参数 s, s'，在 K 上截出之弦长各为 σ, σ'. 考虑积分

$$I=\int(\sigma\sin\theta'-\sigma'\sin\theta)^2 ds\wedge d\theta\wedge ds'\wedge d\theta', \tag{2.2.17}$$

积分域为：$0\leqslant s,\ s'\leqslant L,\ 0\leqslant\theta,\ \theta'\leqslant\pi$. 利用公式 (2.2.16)，即 $\sin\theta\,ds\wedge d\theta=dG,\ \sin\theta' ds'\wedge d\theta'=dG'$，以及

$$\int_0^\pi \sigma^2\,d\theta=2F,\quad \int_0^\pi \sin^2 t\,dt=\pi/2, \tag{2.2.18}$$

我们有

$$I=2\pi L^2F-2\int\sigma\,dG\int\sigma'\,dG'.$$

在考虑上式中的两个积分时，应注意到 s, s' 都是从 0 变到 L 的，因此每条与 K 相交的直线应作为两个位置看待，从而

$$I=2\pi L^2F-8\int_{G\cap K\neq\emptyset}\sigma\,dG\int_{G'\cap K\neq\emptyset}\sigma'\,dG'$$
$$=2\pi F(L^2-4\pi F). \tag{2.2.19}$$

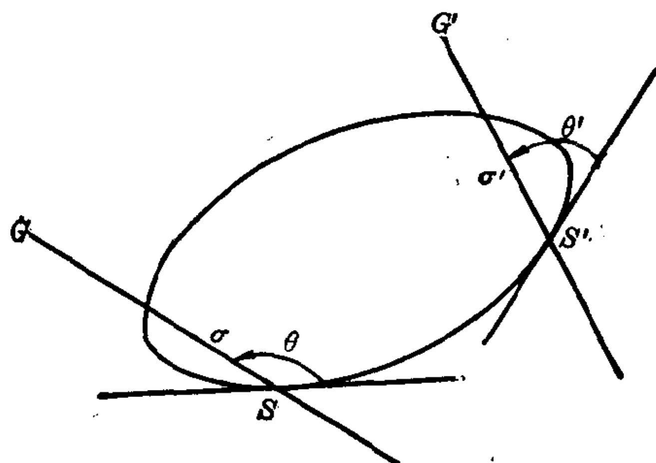


图 2-5

因为 $I\geqslant 0$, 从而证明了经典的等周不等式:

$$L^2-4\pi F\geqslant 0. \tag{2.2.20}$$

这一证法属于 Blaschke.

§2.3 点偶与线偶

2.3.1 点偶的密度

由点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 组成的点偶 (P_1, P_2), 其密度表示式为

$$dP_1\wedge dP_2=dx_1\wedge dy_1\wedge dx_2\wedge dy_2. \tag{2.3.1}$$

若以另外的一些参数来确定点偶,则点偶的密度将取相应的形式. 如图，设通过二点 P_1, P_2 的直线 G 之坐标为 p, ϕ. 于直线 G 上取定方向 τ, $\tau=\phi+\pi/2$. 在此轴上有向线段 HP_1, HP_2 的值记为 t_1, t_2. 参数 p, ϕ, t_1, t_2 可作为点偶 (P_1, P_2) 的坐标. 现在我们来寻求用这些参数表达点偶密度的表达式. 我们有

$$x_i=p\cos\phi-t_i\sin\phi,$$

$$y_i = p\sin\phi + t_i\cos\phi,\quad (i=1,\ 2). \tag{2.3.2}$$

微分之，得

$$dx_i = \cos\phi\, dp - (p\sin\phi + t_i\cos\phi)d\phi - \sin\phi\, dt_i,$$
$$dy_i = \sin\phi\, dp + (p\cos\phi - t_i\sin\phi)d\phi + \cos\phi\, dt_i.$$

作以上二式之外积，有

$$dP_i = dx_i \wedge dy_i = pdp\wedge d\phi + dp\wedge dt_i - t_i d\phi\wedge dt_i,\quad i=1,\ 2.$$

再作 dP_1 与 dP_2 之外积，有

$$dP_1 \wedge dP_2 = (t_2 - t_1)dp\wedge d\phi\wedge dt_1\wedge dt_2.$$

由于 $dG = dp\wedge d\phi$，且因仅考虑非负密度，故最后有

$$dP_1\wedge dP_2 = |t_2 - t_1|\, dG\wedge dt_1\wedge dt_2. \tag{2.3.3}$$

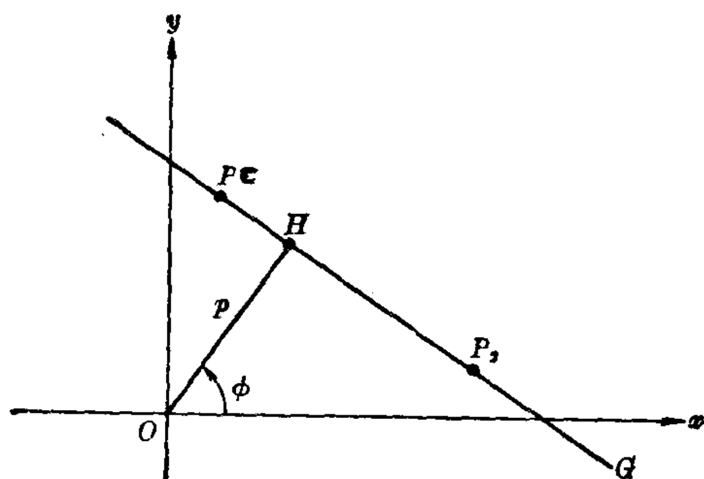


图 2-6

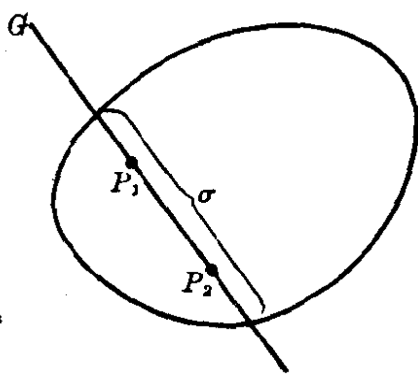


图 2-7

2.3.2 凸集的弦幂积分

设 K 为有界凸集，σ 为 K 被 G 截出的弦长. 考虑积分

$$I_n = \int_{G\cap K\neq\emptyset} \sigma^n dG, \tag{2.3.4}$$

其中 n 为非负整数. I_n 称为凸集 K 的弦幂积分，而序列 $\{I_n\}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 称为凸集 K 的弦幂积分序列. 为了研究 I_n，常常引进另一积分序列:

$$J_n = \int_{P_1,P_2\in K} r^n dP_1\wedge dP_2, \tag{2.3.5}$$

其中 r 表示 P_1 与 P_2 两点间的距离.

I_n 与 J_n 之间存在着简单的联系. 事实上, 利用密度形式 (2.3.3), 我们有

$$\begin{aligned}J_n &= \int |t_2-t_1|^{n+1} d\,t_1 \wedge dt_2 \wedge dG \\ &= \int dG \wedge dt_1 \left[\int_{t_1}^{b} (t_2-t_1)^{n+1} d\,t_2 + \int_{a}^{t_1} (t_1-t_2)^{n+1} d\,t_2\right] \\ &= \frac{1}{n+2} \int dG \int_a^b \left[(b-t_1)^{n+2} + (t_1-a)^{n+2} \right] dt_1 \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+3)} \int_{G\cap K\neq\emptyset} (b-a)^{n+3} dG, \end{aligned} \qquad (2.3.6)$$

其中 a, b 为弦的端点所对应的 t 之取值, 故 $b-a=\sigma$. 这样, 我们就导出了下列关系:

$$J_n = \frac{2}{(n+2)(n+3)} I_{n+3}, \quad n \geqslant -1. \qquad (2.3.7)$$

此式亦可改写为

$$I_n = \frac{n(n-1)}{2} J_{n-3}, \quad n \geqslant 2. \qquad (2.3.8)$$

2.3.3 研究弦幂积分的意义

从 I_n 的定义即可看出, I_n 的几何背景是丰富的, 它们势必反映出凸集的一些几何特性. 关于 I_0 和 I_1, 由 (2.2.7) 和 (2.2.8) 二式, 有

$$I_0 = L, \ I_1 = \pi F, \qquad (2.3.9)$$

其中 L 和 F 分别为凸集 K 的周长和面积.

对于 $n=2$, 由 (2.3.8) 式, 有

$$I_2 = \int_{G\cap K\neq\emptyset} \sigma^2 dG = \int_{P_1, P_2 \in K} \frac{1}{r} dP_1 \wedge dP_2. \qquad (2.3.10)$$

对于 $n=3$, 因 $J_0 = F^2$, 故由 (2.3.8) 式得到著名的 Crofton 公式:

$$I_3 = \int_{G\cap K\neq\emptyset} \sigma^3 dG = 3F^2. \qquad (2.3.11)$$

对于 $n=4$, 若以 $E(r)$ 表示由下式定义的 K 内二点间平均距离:

$$E(r)=\frac{1}{F^2}\int_{P_1,P_2\in K} r\,dP_1\wedge dP_2, \qquad (2.3.12)$$

那么,由 (2.3.8) 式推知

$$I_4=\int_{G\cap K\neq\emptyset}\sigma^4\,dG=6\,F^2E(r). \qquad (2.3.13)$$

由以上对$\{I_n\}$的前几项的考察，已可看出诸 I_n 确实反映了凸集的一些重要的几何特征. 另外,根据 (2.3.9) 式,经典的等周不等式可表述为

$$I_0^2-4\,I_1\geqslant 0, \qquad (2.3.14)$$

可见探讨诸 I_n 间的不等式关系也是很有意义的.

2.3.4 弦幂积分不等式

诸 I_n 之间的不等式关系皆称为**弦幂积分不等式**. 其中最重要的一组已知不等式,是诸 I_n 与 I_1 之间的如下关系:

$$I_2\leqslant\frac{16}{3\pi^2}\,I_1^{3/2}, \qquad (2.3.15\,\mathrm{a})$$

$$I_n\geqslant\frac{2\cdot4\cdots n}{3\cdot5\cdots(n+1)}\,2^{n+1}\pi^{-n}I_1^{(n+1)/2},\quad n=4,\ 6,\ 8,\ \cdots \qquad (2.3.15\,\mathrm{b})$$

$$I_n\geqslant\frac{1\cdot3\cdots n}{2\cdot4\cdots(n+1)}\,2^{n}\pi^{-(n+1)}I_1^{(n+1)/2},\quad n=3,\ 5,\ 7,\cdots \qquad (2.3.15\,\mathrm{c})$$

至于 $n=0$, 即 I_0 与 I_1 的关系,前面已经提到,是经典的等周不等式; $n=3$ 的情形,由(2.3.9)与(2.3.11)可知应有 $I_3=\frac{3}{\pi^2}I_1^2$. 完整地获得(2.3.15)这一组不等式并加以严格证明的是吴大任. 对 3 维情形,吴大任也成功地导出这种类型的不等式,并将它们排列成统一的形式. 在此基础上,任德麟导出任意维欧氏空间弦幂积分的统一不等式[2]、[3].

2.3.5 线偶的密度

设二直线 $G_i\,(\,p_i,\ \phi_i)\,(i=1,\ 2)$ 的交点为 $P(x,\ y)$, 由 x 轴到 G_1、G_2 的角分别为 α_1、α_2. 我们希望用参数 $x,\ y,\ \alpha_1,\ \alpha_2$ 表示线偶 $(G_1,\ G_2)$ 的密度 $dG_1\wedge dG_2$. 我们有

$$\phi_i = \alpha_i - \pi/2. \tag{2.3.16}$$

从而

$$p_i = x\cos\phi_i + y\sin\phi_i = x\sin\alpha_i - y\cos\alpha_i,\ i=1,\ 2. \tag{2.3.17}$$

微分之，有

$$d\phi_i = d\alpha_i,$$

$$dp_i = \sin\alpha_i\, dx - \cos\alpha_i\, dy + (x\cos\alpha_i + y\sin\alpha_i)\, d\alpha_i.$$

作外积，则有

$$dG_i = dp_i \wedge d\phi_i = \sin\alpha_i\, dx \wedge d\alpha_i - \cos\alpha_i\, dy \wedge d\alpha_i.$$

最后得线偶的密度：

$$dG_1 \wedge dG_2 = |\sin(\alpha_2 - \alpha_1)|\, dP \wedge d\alpha_1 \wedge d\alpha_2. \tag{2.3.18}$$

此公式"对偶"于点偶的密度形式 (2.3.3)。

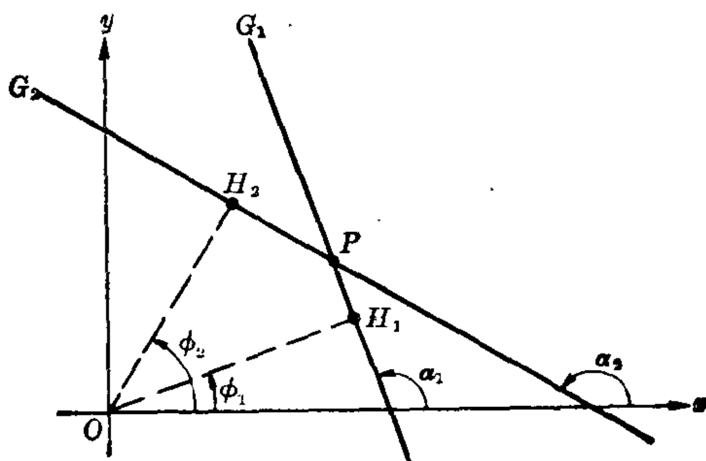


图 2-8

2.3.6 Crofton 公式

现在我们来利用密度形式 (2.3.18) 导出一个积分公式. 设 K 为有界凸集，周长和面积分别为 L 和 F. 考虑(2.3.18)式的双方在集 $\{G: G\cap K \neq \emptyset\}$ 上的积分. 左方的积分为

$$\int_{G\cap K\neq\emptyset} dG_1 \wedge dG_2 = L^2. \tag{2.3.19}$$

右方的积分拆成两部分：一部分为二直线之交点 P 属于 K 者，另一部分为 P 在 K 之外者. 对于 $P\in K$，有

$$\int_{P\in K} dP \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\sin(\alpha_2-\alpha_1)|\, d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 = 2\pi F. \tag{2.3.20}$$

对于 $P\in K$, 作出 P 到 K 的二支持线，由 x 轴到此二支持线的角记为 α, β. 不妨设 $\beta>\alpha$. 我们有

$$\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta |\sin(\alpha_2-\alpha_1)|\,d\alpha_1\wedge d\alpha_2$$

$$=\int_\alpha^\beta d\alpha_1\left[\int_\alpha^{\alpha_1}\sin(\alpha_1-\alpha_2)d\alpha_2+\int_{\alpha_1}^\beta \sin(\alpha_2-\alpha_1)d\alpha_2\right]$$

$$=\int_\alpha^\beta [2-\cos(\alpha_1-\alpha)-\cos(\beta-\alpha_1)]d\alpha_1$$

$$=2(\beta-\alpha)-2\sin(\beta-\alpha). \qquad (2.3.21)$$

通过点 P 的二支持线间的夹角记为 ω, 即 $\omega=\beta-\alpha$, 则有

$$\int_{P\in K} dP\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta |\sin(\alpha_2-\alpha_1)|\,d\alpha_1\wedge d\alpha_2$$

$$=2\int_{P\in K}(\omega-\sin\omega)dP. \qquad (2.3.22)$$

由 (2.3.19)、(2.3.20) 及 (2.3.22) 三式，有

$$\int_{P\in K}(\omega-\sin\omega)dP=\frac{1}{2}L^2-\pi F, \qquad (2.3.23)$$

这就是著名的 Crofton 公式.

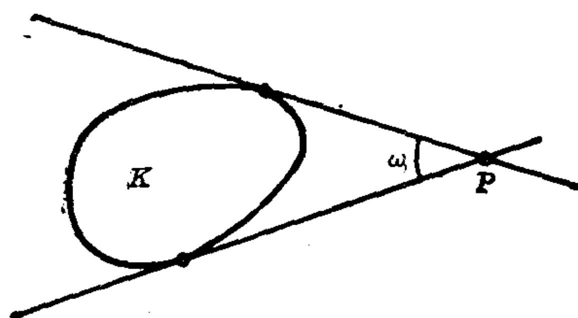


图 2-9

§2.4 平面的随机分割

2.4.1 凸域的随机分割

平面或空间的随机分割是积分几何与几何概率中研究得较多的问题之一. 这里对平面的随机分割作一简要介绍. 先讨论有界凸域的分割，全平面的分割作为其极限情形考虑.

设 K 为平面上的有界闭凸域，其周长和面积分别为 L 和 F. 设 $G_i(p_i, \phi_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 为 n 条与 K 相交的随机直线. 这些直线将 K 分割为 c 个区域. 以 ν 表示内顶点总数(每个内顶点实际上是位于 K 内的线偶的交点). 又，以 e 表示棱的总数(包括相邻顶点间的直线段及属于边界的曲线段). 例如，在下图中，$n=4$, $c=10$, $\nu=5$, $e=22$.

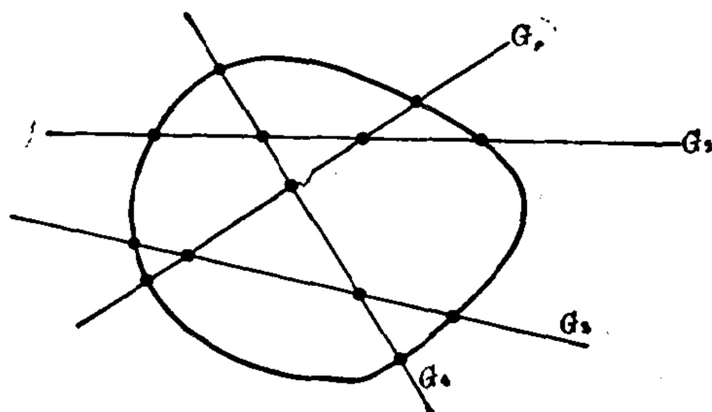


图 2-10

我们来求 c, ν 及 e 的平均值. ν 的平均值 $E(\nu)$ 按定义应为

$$E(\nu)=\frac{1}{L^n}\int_{G_i\cap K\neq\emptyset}\nu dG_1\wedge dG_2\wedge\cdots\wedge dG_n. \qquad (2.4.1)$$

定义函数 ν_{hk} 如下：

$$\nu_{hk}=\begin{cases}1, & \text{当 } h\neq k \text{ 且 } G_h\cap G_k\in \operatorname{int} K,\\ 0, & \text{当 } h=k \text{ 或 } G_h\cap G_k\overline{\in} \operatorname{int} K,\end{cases} \qquad (2.4.2)$$

因此内顶点总数为$\binom{n}{2}=n(n-1)/2$ 项之和，$\nu=\sum\limits_{h<k}\nu_{hk}$. 以 σ_k 表示弦 $G_k\cap K$ 之长，则有

$$\int_{\substack{G_h\cap K\neq\emptyset\\ G_k\cap K\neq\emptyset}}\nu_{hk}dG_h\wedge dG_k=2\int_{G_k\cap K\neq\emptyset}\sigma_k dG_k=2\pi F, \quad (2.4.3)$$

其中前一等式来自(2.2.7)式，而后一等式是(2.2.8)式的直接应用. 由 (2.4.3) 式及 $\nu=\sum\limits_{h<k}\nu_{hk}$ 立即有

$$\int_{G_i\cap K\neq\emptyset}\nu dG_1\wedge dG_2\wedge\cdots dG_n=n(n-1)\pi FL^{n-2}. \quad (2.4.4)$$

最后得到

$$E(\nu)=\frac{n(n-1)\pi F}{L^2}. \tag{2.4.5}$$

用类似方法还可求出

$$E(\nu^2)=2\pi\binom{n}{2}\frac{F}{L^2}+24\pi^2\binom{n}{4}\frac{F^2}{L^4}+24\binom{n}{3}\frac{I_2}{L^3}. \tag{2.4.6}$$

找出 $E(\nu)$ 后再求 $E(c)$ 就不困难了. 我们注意, n 条随机直线将 K 分割成 c 个区域, 可以看作是 $\nu+2n$ 个顶点（ν 个内顶点、$2n$ 个在边界 ∂K 上的顶点）和棱数为

$$e=\frac{1}{2}(4\nu+6n)=2\nu+3n \tag{2.4.7}$$

的一个图. 由 Euler 公式, 有

$$c=\nu+n+1, \tag{2.4.8}$$

从而有

$$E(c)=n(n-1)(\pi F/L^2)+n+1. \tag{2.4.9}$$

现在来考虑区域的边数. c 个区域记作 $d_1, d_2, \cdots, d_c$. d_i 的边数记为 e_i, 那么总边数 $e^*=\sum_{i=1}^{c}e_i$. 总边数 e^* 与棱数 e 不是一回事. 在 $e=2\nu+3n$ 条棱中, 有 $2n$ 条属于边界, 它们当中每一条仅是一个区域的边, 余下的 $2\nu+n$ 条棱在 K 的内部, 每一条都同时是二相邻区域的边. 因此总边数

$$e^*=\sum_{i=1}^{c}e_i=2(2\nu+n)+2n=4\nu+4n. \tag{2.4.10}$$

从而

$$E(e^*)=4E(\nu)+4n=\frac{4n(n-1)\pi F}{L^2}+4n. \tag{2.4.11}$$

类似地, 可求出诸区域总边长的平均值. 设 d_i 的周长为 s_i, 总边长 $s=\sum_{i=1}^{c}s_i=2\sum_{j=1}^{n}\sigma_j+L$. 于是

$$E(s)=2nE(\sigma)+L=2n\pi F/L+L, \tag{2.4.12}$$

其中利用了 (2.2.9) 式.

另外, 随机变量 $N=e^*/c$、$S=s/c$ 和 $A=F/c$ 依次代表单个区域的边数之平均值、单个区域周长之平均值和单个区域的面积的平均值. 一般情况下, $E(N)$, $E(S)$ 及 $E(A)$ 较为复杂. 但可

考虑所谓“平均值的商”：

$$E^*(N)=E(e^*)/E(c)$$

$$=4-\frac{4L^2}{n(n-1)\pi F+(n+1)L^2}, \qquad (2.4.13)$$

$$E^*(S)=E(S)/E(c)$$

$$=\frac{2n\pi FL+L^3}{n(n-1)\pi F+(n+1)L^2}, \qquad (2.4.14)$$

$$E^*(A)=F/E(c)$$

$$=\frac{FL^2}{n(n-1)\pi F+(n+1)L^2}. \qquad (2.4.15)$$

2.4.2 平面的随机分割

作为上述讨论的极限情形，我们来讨论随机直线对全平面的分割.

设 $K(t)$ 为依赖于参数 t 的一族凸域，其面积和周长分别为 $F(t)$ 和 $L(t)$，对于平面上任一点 P，存在参数 t_P，使得当 $t>t_P$ 时有 $P\in K(t)$. 对这样的 $K(t)$，有下列简单的结论：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L(t)}{F(t)}=0. \qquad (2.4.16)$$

为了证明 (2.4.16) 式，对每个 $K(t)$，作出含于 $K(t)$ 之内的最大的圆 $C(t)$. $C(t)$ 之圆心记为 O，半径记为 $R(t)$. 因 $K(t)$ 符合上述要求，必有 $\lim\limits_{t\to\infty}R(t)=\infty$. 以 O 为参考点，设 $K(t)$ 的支持函数为 $h_1(\phi)$，接触点处的弧元记为 ds_t，则有

$$F(t)=\frac{1}{2}\int h_1(\phi)ds_t\geqslant\frac{1}{2}R(t)L(t),$$

由此推知 (2.4.16) 成立.

今设 K_0 为含于 $K(t)$ 内的长度为 b 的线段. 据二项分布，n 条与 $K(t)$ 相交的随机直线中恰有 m 条与 K_0 相交的概率为

$$p_m=\binom{n}{m}\left(\frac{2b}{L}\right)^m\left(1-\frac{2b}{L}\right)^{n-m}. \qquad (2.4.17)$$

令 $t\to\infty$，此时 $K(t)$ 随 t 的增长而扩展以致覆盖全平面，同时让

随机直线的条数也随之无限增加，即 $\lim\limits_{t\to\infty} n(t)=\infty$，且符合下列条件：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{n(t)}{L(t)}=\frac{\lambda}{2},\ \lambda \text{ 为某正常数.} \tag{2.4.18}$$

满足上述要求的依赖于 t 的随机直线系，称为参数为 λ 的齐次平面 Poisson 直线过程. 显然，当 $t\to\infty$ 时，(2.4.17) 式的极限为

$$p_m^*=\lim_{t\to\infty}p_m=\frac{(b\lambda)^m}{m!}e^{-b\lambda}, \tag{2.4.19}$$

而 m 的平均值为

$$E(m)=\sum_{m=0}^{\infty}mp_m^*=b\lambda. \tag{2.4.20}$$

(2.4.20) 式给出了 λ 之几何意义：λ 等于与单位线段相交的随机直线条数的平均值.

由 (2.4.5) 和 (2.4.6) 二式，有

$$\lim_{t\to\infty}E(\nu/F)=\pi\lambda^2/4,\quad \lim_{t\to\infty}E(\nu^2/F^2)=\pi^2\lambda^4/16, \tag{2.4.21}$$

从而 $\text{var}(\nu/F)=E(\nu^2/F^2)-[E(\nu/F)]^2\to 0$. 由此得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\nu}{F}=\frac{\pi\lambda^2}{4}\quad (\text{a. s.}), \tag{2.4.22}$$

即单位面积上平均顶点个数.

由 $$\lim_{t\to\infty}\frac{n}{F}=\lim_{t\to\infty}[(n/L)(L/F)]=0$$

及 (2.4.8) 式，得平面被分成的小区域面积之均值：

$$E(A)=\lim_{t\to\infty}\frac{F}{c}=\lim_{t\to\infty}(\nu/F+n/F+1/F)^{-1}$$

$$=\frac{4}{\pi\lambda^2}\quad (\text{a. s.}), \tag{2.4.23}$$

再利用 $e^*=4\nu+4n$（即(2.4.10)式），得小区域的平均边数：

$$E(N)=\lim_{t\to\infty}\frac{e^*}{c}=\lim_{t\to\infty}\frac{4\nu+4n}{\nu+n+1}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4+4\dfrac{n/F}{\nu/F}}{1+\dfrac{n/F}{\nu/F}+\dfrac{1}{\nu}}=4\quad (\text{a. s.}). \tag{2.4.24}$$

为了得到小区域的平均周长，利用 (2.4.8) 及 $s=2\sum_{j=1}^{n}\sigma_j+L$，有

$$E(S)=\lim_{t\to\infty}\frac{S}{c}=\lim_{t\to\infty}\frac{2\sum_{j=1}^{n}\sigma_j+L}{\nu+n+1}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j/n\right)+L/n}{\nu/n+1+1/n};$$

但 $(\sum\sigma_j/n)\to E(\sigma)=\pi F/L$，$\nu/n=(\nu/F)(F/L)(L/n)$，故有

$$E(S)=\frac{4}{\lambda}\quad(\text{a. s.}).\tag{2.4.25}$$

2.4.3 关于随机分割的注记

用各种方法对空间进行随机分割已有许多研究．以上所述用 Poisson 直线场分割平面，以及用 Poisson 平面场分割 3 维空间，是最简单的一种情形．

分割平面(或空间)的另一种重要的提法是：设在平面(或空间)中给定一 Poisson 点场，与点场中每一点相关联地产生包含此点的这样一种区域，此区域中任何点到该点之距离小于到点场中任何其他点的距离．这样，便将整个平面(空间)分割为许多凸多边形域(凸多面体域)．这种类型的分割既有理论兴味，亦有实用意义．

§2.5 平面上的带域集

2.5.1 带域的密度

设平面上有二平行线，平行线间的距离为 a．此二平行线间的闭域称为宽度为 a 的带域．对于具有给定宽度 a 的带域 B，其位置由它的中平行线的参数 p，ϕ 完全确定．因此当 a 固定时，带域 B 的密度为

$$dB=dp\wedge d\phi,\tag{2.5.1}$$

不计一个常数因子，这是关于平面运动群不变的唯一的密度．

设 K 是周长为 L 的凸集. 现在我们来求与 K 相遇的带域 B 之集的测度, 即求 $m\{B: B\cap K\neq\emptyset\}$. 显然, $B\cap K\neq\emptyset$ 等价于 B 的中平行线与 $K_{\frac{a}{2}}$ (K 的距离为 $a/2$ 的外平行凸集)相交, 从而有

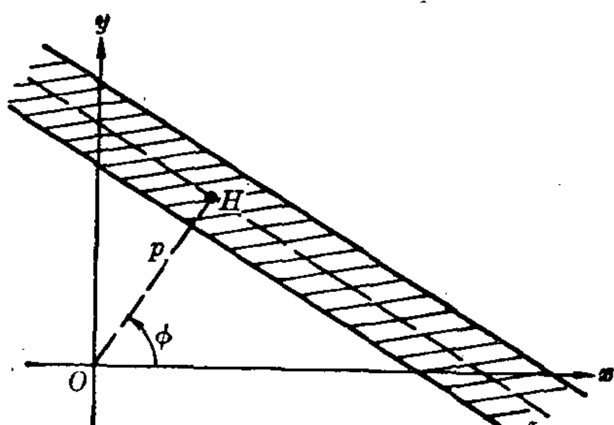


图 2-11

$$m\{B:\ B\cap K\neq\emptyset\}=\int_{B\cap K\neq\emptyset}dB=L+\pi a.\quad(2.5.2)$$

当 K 退化为一点 P, 则 (2.5.2) 式成为

$$m\{B:\ P\in B\}=\pi a.\qquad(2.5.3)$$

当 K 退化为长度等于 s 的线段 S 时, (2.5.2) 给出

$$m\{B:\ B\cap S\neq\emptyset\}=2s+\pi a.\qquad(2.5.4)$$

现在我们来求包含某固定凸域的带域集的测度. 设 K 是周长为 L 的凸域, 我们希望求出 $m\{B:\ K\subset B\}$ 的表达式.

假定 K 的直径 (K 中任二点间距离之上确界)为 D, 带域 B 的宽度为 a, 且 $D\leqslant a$. 显然有

$$\begin{aligned}m\{B:\ K\subset B\}&=m\{B:\ B\cap K\neq\emptyset\}\\&\quad-m\{B:\ B\text{ 的边界与 }K\text{ 相遇}\}\\&=\pi a+L-2L=\pi a-L.\end{aligned}\qquad(2.5.5)$$

2.5.2 Buffon 投针问题的推广

在平面上置放间隔为 D 的平行线网, 将长度为 l ($\leqslant D$) 的线段(小针)随机地投掷到平面上, 求小针与平行线网相遇的概率 p. Buffon (1707～1788) 于 1733 年首先提出并用积分学方法解决了这一问题, 于 1777 年作为他的著作《自然史》的附录正式发表. 这一问题后人称之为 Buffon 投针问题或 Buffon 小针问题. Buffon 提供的解答是:

$$p=\frac{2l}{\pi D}. \qquad (2.5.6)$$

Buffon 投针问题是最早的一个几何概率问题，在一定意义上说，它也是一个最有代表性的影响最大的几何概率问题． Buffon 问题问世二百余年以来，已有各种推广研究． 特别是积分几何的出现，使人们得以从全新的角度对这类问题予以洞察． 以下我们介绍 Buffon 问题的一种推广：将平行线网换成平行带网，同时以凸域代替小针．

设平面上置放一平行带网，带域的宽度为 a，相邻二带域间的间隔为 D． 又设 K_1 为直径小于 D 之凸域，其周长为 L_1． 将 K_1 随机地投掷于平面上，求 K_1 与平行带网相遇的概率 p．

为了解决这一问题，不妨换一种角度来考察：设想 K_1 在平面上位置固定，而将上述平行带网随机地投掷到平面上，求网与 K_1 相遇的概率． 因 K_1 的直径小于 D，故可作一直径为 D 的圆盘 K，使得 $K_1\subset K$． 网的一个位置，对应于网中唯一条带域与 K 相交的位置（K 碰巧与二相邻带域相切的情形可不考虑，因系零测度集）． 这样，网的一切可能的位置，对应于与 K 相遇的带域之集，由(2.5.2)式，其测度为 $\pi a+\pi D$． 另一方面，仍由(2.5.2)式，与 K_1 相遇的带域集的测度为 $\pi a+L_1$． 因此所求概率为

$$p=\frac{\pi a+L_1}{\pi(a+D)}. \qquad (2.5.7)$$

当平行带网退化为平行线网 ($a=0$)，同时凸域 K_1 退化为长度为 l 的线段（看作是周长为 $2l$ 的凸域），则 (2.5.7) 式便给出经典的 Buffon 问题的解(2.5.6)（以上推广见[4]，71～72）．

2.5.3 进一步推广（任德麟[5]）

在经典的 Buffon 问题中，限制小针长度不超过平行线间的间隔． 上述推广中亦有 K_1 的直径不超过 D 的限制． 现在我们取消这一限制，对 Buffon 问题作进一步推广．

引理 设 B 为宽度等于 D 的带域， 又设 K_1 为平面上有界

闭凸域，其宽度函数为 $w(\phi)$. 函数 $w_D(\phi)$ 由下式定义：

$$w_D(\phi)=\begin{cases} w(\phi), & \text{当 } w(\phi)\leqslant D, \\ D, & \text{当 } w(\phi)>D. \end{cases} \tag{2.5.8}$$

则含有 K_1 的带域 B 之集的测度为

$$m\{B:\ K_1\subset B\}=\pi D-\int_0^{\pi} w_D(\phi)\,d\phi. \tag{2.5.9}$$

证明 因带域 B 的运动密度为

$$dB=dp\wedge d\phi, \tag{2.5.10}$$

故有

$$m\{B:\ K_1\subset B\}=\int_{K_1\subset B} dp\wedge d\phi$$

$$=\int_0^{\pi}[D-w_D(\phi)]\,d\phi=\pi D-\int_0^{\pi} w_D(\phi)\,d\phi.$$

当 K_1 的直径不超过 D 时，$w_D(\phi)\equiv w(\phi)$，此时公式 (2.5.9) 实际上就是前述 (2.5.5) 式.

定理 设平面上有间隔为 D 的平行带网，带域 B 的宽度为 a. 又设 K_1 为有界闭凸域，其宽度函数为 $w(\phi)$. 将 K_1 随机地投掷于平面上，K_1 与平行带网相遇的概率为

$$p=\frac{\pi a+\int_0^{\pi} w_D(\phi)\,d\phi}{\pi(a+D)}, \tag{2.5.11}$$

其中函数 $w_D(\phi)$ 按 (2.5.8) 式定义.

证明 与 2.5.2 段作相同考虑，视凸集 K_1 固定于平面某一位置，将平行带网随机地投掷于平面上. 另外，在平面上作一直径为 D 的圆域 K (K 固定于平面上任何位置均可. 其实上段的讨论中亦可不必要求 $K_1\subset K$). 显然，平行带网一切可能位置之集的测度，等于与圆域 K 相交的带域 B 之集的测度. 后一测度为

$$m\{B:\ B\cap K\neq\emptyset\}=\pi a+\pi D=\pi(a+D). \tag{2.5.12}$$

又，考虑平行带网的二相邻带域之间的区域，它是宽度为 D 的带域，记为 B_1. 由引理知，

$$m\{B_1:\ K_1\subset B_1\}=\pi D-\int_0^{\pi} w_D(\phi)\,d\phi. \tag{2.5.13}$$

从而，与 K_1 相遇的平行带网之集的测度是 (2.5.12) 与 (2.5.13)

二式所表达的测度之差，即

$$\pi(a+D)-\left(\pi D-\int_0^\pi w_D(\phi)\,d\phi\right)$$

$$=\pi a+\int_0^\pi w_D(\phi)\,d\phi. \qquad (2.5.14)$$

由 (2.5.12) 和 (2.5.14) 二式立即得到 (2.5.11) 式.

当 K_1 的直径不超过 D 时，(2.5.11) 式就成为 (2.5.7) 式.

特款 设 K_1 退化为长度为 l 的小针. 同时，为方便计，设 $a=0$，即平行带网退化为平行线网. 在适当的参考系下，小针的宽度函数为

$$w(\phi)=l\sin\phi,\quad 0\leqslant\phi<\pi. \qquad (2.5.15)$$

情形 1 若 $l\leqslant D$，此时 $w_D(\phi)\equiv w(\phi)$. 公式 (2.5.11) 在此情形下给出经典的 Buffon 问题解:

$$p=\frac{2l}{\pi D}.$$

情形 2 若 $l>D$，此时

$$w_D(\phi)=\begin{cases} l\sin\phi, \text{ 当 } 0\leqslant\phi\leqslant\arcsin\dfrac{D}{l} \text{ 及 } \pi-\arcsin\dfrac{D}{l}\leqslant\phi\leqslant\pi, \\ D, \text{ 当 } \arcsin\dfrac{D}{l}\leqslant\phi\leqslant\pi-\arcsin\dfrac{D}{l}. \end{cases}$$

这时公式 (2.5.11) 给出

$$p=\frac{2}{\pi}\arccos\frac{D}{l}+\frac{2}{\pi D}[l-(l^2-D^2)^{1/2}], \qquad (2.5.16)$$

这是著名的所谓关于长针的 Buffon 问题的解.

以下我们来讨论凸域恰好与网中 h 条带域相遇的概率. 关于平行带网及凸域 K_1 之假定同前.

令 $s_k=kD+(k-1)a$. 引入函数 $w_{(h)}(\phi)$ 如下:

$$w_{(h)}(\phi)=\begin{cases} 0, & \text{当 } w(\phi)<s_{h-1}, \\ w(\phi)-s_{h-1}, & \text{当 } s_{h-1}\leqslant w(\phi)<s_h, \\ s_{h+1}-w(\phi), & \text{当 } s_h\leqslant w(\phi)<s_{h+1}, \\ 0, & \text{当 } w(\phi)\geqslant s_{h+1}, \end{cases} \qquad (2.5.17)$$

我们有下列结论:

定理 平面上有间隔为 D 的平行带网，带域的宽度为 a. K_1 为有界闭凸域，宽度函数为 $w(\phi)$. 又，函数 $w_{(h)}(\phi)$ 如 (2.5.17) 式所定义. 随机地将 K_1 投掷于平面上，则 K_1 恰好与网中 h 条带域相遇的概率为

$$p_h=\frac{1}{\pi(a+D)}\int_0^\pi w_{(h)}(\phi)\,d\phi. \qquad (2.5.18)$$

证明 仿照证明引理的方法不难证明，有 h 条带域与 K_1 相遇的平行带网之集的测度为

$$\int_0^\pi w_{(h)}(\phi)d\phi.$$

证明的细节请读者自行补足.

特款 设凸域 K_1 退化为长度等于 L 的线段 N. s_k 之意义同前，即 $s_k=kD+(k-1)a$. 假定 $s_n\leqslant L<s_{n+1}$. N 的宽度函数为 $w(\phi)=L\sin\phi$, $0\leqslant\phi<\pi$. 对于 $h=1, 2, \cdots, n$, 记 $\alpha_h=\arcsin\frac{s_h}{L}$; 又，规定 $\alpha_{n+1}=\frac{\pi}{2}$. 按 (2.5.17) 式规定 $w_{(h)}(\phi)$ 如下：

$$w_{(h)}(\phi)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant\phi<\alpha_{h-1},\\ L\sin\phi-s_{h-1}, & \text{当 } \alpha_{h-1}\leqslant\phi<\alpha_h,\\ s_{h+1}-L\sin\phi, & \text{当 } \alpha_h\leqslant\phi<\alpha_{h+1},\\ 0, & \text{当 } \alpha_{h+1}\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases} \qquad (2.5.19)$$

$$h=1, 2, \cdots, n.$$

上式仅给出当 $0\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时 $w_{(h)}(\phi)$ 之定义. 当 $\frac{\pi}{2}\leqslant\phi\leqslant\pi$ 时，$w_{(h)}(\phi)=w_{(h)}(\pi-\phi)$.

将 (2.5.19) 代入 (2.5.18)，得

$$p_h=\frac{1}{\pi(a+D)}\Big[2\int_{\alpha_{h-1}}^{\alpha_h}(L\sin\phi-s_{h-1})d\phi$$

$$+2\int_{\alpha_h}^{\alpha_{h+1}}(s_{h+1}-L\sin\phi)d\phi\Big]$$

$$=\frac{2}{\pi(a+D)}[s_{h+1}\alpha_{h+1}-(s_{h+1}+s_{h-1})\alpha_h+s_{h-1}\alpha_{h-1}]$$

$$+\frac{2L}{\pi(a+D)}(\cos\alpha_{h+1}-2\cos\alpha_h+\cos\alpha_{h-1}), \quad (2.5.20)$$

$$h=1, 2, \cdots, n.$$

对于 $h=n+1$, 这时 $w_{(n+1)}(\phi)$ 取如下形式:

$$w_{(n+1)}(\phi)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant\phi<\alpha_n, \\ L\sin\phi-s_n, & \text{当 } \alpha_n\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases} \quad (2.5.21)$$

从而有

$$p_{n+1}=\frac{2L}{\pi(a+D)}\cos\alpha_n+\frac{2s_n}{\pi(a+D)}\left(\alpha_n-\frac{\pi}{2}\right). \quad (2.5.22)$$

当 $a=0$, $D=1$ 时, (2.5.20) 和 (2.5.22) 二式成为下列形状:

$$p_h=\frac{2}{\pi}[(h+1)\alpha_{h+1}-2h\alpha_h+(h-1)\alpha_{h-1}]$$

$$+\frac{2L}{\pi}(\cos\alpha_{h+1}-2\alpha_h+\cos\alpha_{h-1}), \quad (2.5.23)$$

$$h=1, 2, \cdots, n.$$

$$p_{n+1}=2L\pi^{-1}\cos\alpha_n+2n\pi^{-1}(\alpha_n-\pi/2). \quad (2.5.24)$$

这种特殊情形是前人已有结果,它仅是 (2.5.18) 的一种非常特殊的应用.

最后,顺便指出,知道诸 p_h 后,则显然

$$\tilde{p}_k=\sum_{h=k}^{n+1}p_h \quad (2.5.25)$$

为凸域 K_1 至少与 k 条带域相遇的概率. 特别是当 $k=1$, 即得 K_1 至少与一条带域相遇的概率,也就是前面我们讲的 K_1 与平行带网相遇的概率. 就(2.5.20)和(2.5.22)二式所表示的这种特殊情况而言, $\sum_{h=1}^{n+1}p_h$ (注意令 $a=0$) 正好就是 (2.5.16) 式.

本章参考文献

[1] S. Lang, «Real Analysis», Chap. 11, Addison-Wesley Publishing Company, 1983.

[2] T. J. Wu (吴大任), "On the relations between the integrals for the power

of chords of a convex set", 全国微分几何学术讨论会，1983; 或见吴大任,"关于凸集弦幂积分的一组等周不等式", 南开大学学报(自然科学版)，**1** (1985), 1～6.

[3] Ren Delin (任德麟), "Two topics in integral geometry", Proceedings of the 1981 symposium on differential geometry and differential equations (Shanghai-Hefei), Science Press, Beijing, China, 1984, 309～333.

[4] L. A. Santaló, «Integral Geometry and Geometric Probability», Addison-Wesley Publishing Company, 1976.

[5] 任德麟,"Buffon 问题的一种推广",待发表。

第 三 章

平面积分几何的基本定理

在上一章中，我们讨论了各种几何元素集的测度，规定这种测度的准则是：要求该测度关于平面上欧氏运动群不变．讨论的方法，是就一种一种的几何元素集(如点集、直线集等)分别考虑的．本章中我们将进行较为系统的讨论．首先建立积分几何中最基本的概念——运动密度，然后介绍平面积分几何的基本定理——Poincaré 公式和 Blaschke 运动基本公式．

§3.1 平面运动群

3.1.1 平面运动群

平面上欧氏运动群(在不致引起混淆的地方，一律简称为平面运动群，或运动群)以 $\mathfrak{M}$ 表示．元素 $u\in\mathfrak{M}$ 称为运动．设平面已取定直角坐标系．若运动 u 将点 $P(x, y)$ 变到点 $P'(x', y')$，则 u 可表示为

$$u:\ \begin{cases} x'=x\cos\phi-y\sin\phi+a, \\ y'=x\sin\phi+y\cos\phi+b, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

其中 a, b, ϕ 称为运动 u 的参数，并将 u 记作 $u(a, b; \phi)$．将 (3.1.1) 式与通常的坐标变换公式相对照，不难解释具有参数 a, b, ϕ 的运动 u 的几何意义：在平面上取定坐标系 xoy，设想另有一透明薄纸覆盖于平面上，并在薄纸上取坐标系 $x'o'y'$．倘开初

$x'o'y'$ 与 xoy 重叠，且此时平面 $x'o'y'$ 上 P' 点与平面 xoy 上 P 点重合．现将薄纸紧贴原平面作运动，致 o' 关于 xoy 的坐标为 (a, b)，且 ox 到 $o'x'$ 的角为 ϕ．这时 P 和 P' 关于 xoy 的坐标 (x, y)、(x', y') 间的联系正好是(3.1.1)式．基于这样的解释，我们称 a, b 为运动 u 的平移分量，而 ϕ 称为运动 u 的旋转分量．

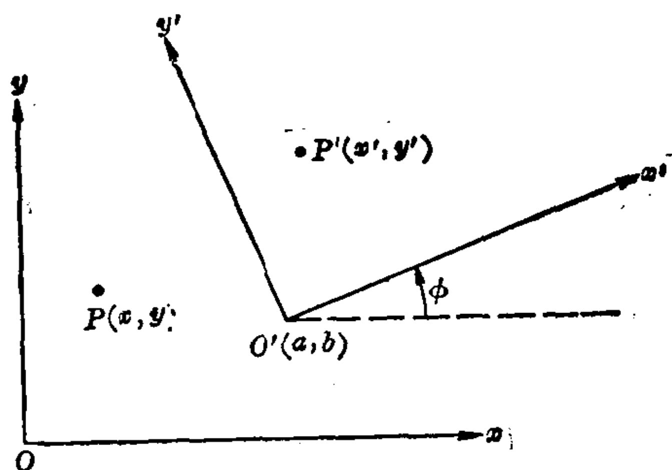


图 3-1

运动 $u(a, b; \phi)$ 的参数的变域为

$$-\infty < a < +\infty, \quad -\infty < b < +\infty, \quad 0 \leqslant \phi < 2\pi.$$

在 3 维欧氏空间 (a, b, ϕ) 中，引入等价关系：

$$(a, b, \phi+2k\pi) \sim (a, b, \phi), \quad k \text{ 为任意整数}, \tag{3.1.2}$$

便得到一个新的 3 维空间(即原 3 维空间借助于等价关系(3.1.2)所形成的商空间)．这个空间中的点与运动群 $\mathfrak{M}$ 的元素一一对应．我们称此空间为运动群 $\mathfrak{M}$ 的参数空间，并且仍以 $\mathfrak{M}$ 表示．

运动群 $\mathfrak{M}$ 中的元素 $u(a, b; \phi)$ 表示为下列矩阵的形式是很有用的：

$$u=\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & a \\ \sin\phi & \cos\phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.1.3}$$

在这种表示下，群的单位元 $e(0, 0; 0)$ 对应于单位阵：

$$e=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

群的运算对应于通常的矩阵乘法，而 u 的逆元则对应于(3.1.3)的逆矩阵

$$u^{-1}=\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & -a\cos\phi-b\sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi & a\sin\phi-b\cos\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.1.4}$$

3.1.2 左推移和右推移

对任意给定的 $s\in\mathfrak{M}$，可以在 $\mathfrak{M}$ 中定义两种自同构：左推移和右推移．左推移定义为

$$L_s:\ \mathfrak{M}\to\mathfrak{M},\ u\mapsto su; \tag{3.1.5}$$

右推移是

$$R_s:\ \mathfrak{M}\to\mathfrak{M},\ u\mapsto us. \tag{3.1.6}$$

现在我们来求在左推移及右推移之下运动的参数变换．设 s 由下列矩阵给出：

$$s=\begin{pmatrix} \cos\phi_0 & -\sin\phi_0 & a_0 \\ \sin\phi_0 & \cos\phi_0 & b_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.1.7}$$

又，u 由 (3.1.3) 表示，则有

$$\begin{aligned} su&=\begin{pmatrix} \cos\phi_0 & -\sin\phi_0 & a_0 \\ \sin\phi_0 & \cos\phi_0 & b_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & a \\ \sin\phi & \cos\phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} \cos(\phi+\phi_0) & -\sin(\phi+\phi_0) & a\cos\phi_0-b\sin\phi_0+a_0 \\ \sin(\phi+\phi_0) & \cos(\phi+\phi_0) & a\sin\phi_0+b\cos\phi_0+b_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

可见

$$L_s:\ \begin{cases} a\to a\cos\phi_0-b\sin\phi_0+a_0, \\ b\to a\sin\phi_0+b\cos\phi_0+b_0, \\ \phi\to\phi+\phi_0. \end{cases} \tag{3.1.9}$$

类似地，对右推移有

$$R_s:\ \begin{cases} a\to a_0\cos\phi-b_0\sin\phi+a, \\ b\to a_0\sin\phi+b_0\cos\phi+b, \\ \phi\to\phi_0+\phi. \end{cases} \tag{3.1.10}$$

3.1.3 $\mathfrak{M}$ 上的微分形式

定义于运动群的参数空间 $\mathfrak{M}$ 上的1级微分形式(简称1形式)是指如下形式的表达式:

$$\omega(u)=\alpha(u)da+\beta(u)db+\gamma(u)d\phi, \qquad (3.1.11)$$

其中 $\alpha(u)$, $\beta(u)$, $\gamma(u)\in C^\infty$, 即它们都是 u 的坐标 a, b, ϕ 的无穷可微函数.

对于任意一点 $u\in\mathfrak{M}$ 处 $\mathfrak{M}$ 上所有1级微分形式之集, 以自然方式引进线性运算:

$$\omega_1(u)+\omega_2(u)=(\alpha_1(u)+\alpha_2(u))da+(\beta_1(u)+\beta_2(u))db+(\gamma_1(u)+\gamma_2(u))d\phi,$$

$$\lambda\omega(u)=\lambda\alpha(u)da+\lambda\beta(u)db+\lambda\gamma(u)d\phi,\ \lambda\in R,$$

则构成一3维向量空间. 此空间称为 $\mathfrak{M}$ 在点 u 处的余切空间, 记为 T_u^*. 1形式 da, db, $d\phi$ 构成 T_u^* 的一组基, 或者, 在 da, db 及 $d\phi$ 的线性组合中任取三个线性无关者, 亦可构成 T_u^* 的基.

由左推移 L_s 和右推移 R_s 分别可以诱导出余切空间之间的映射. 这些诱导映射对以下的讨论至关重要. 由 L_s 可诱导出映射

$$L_s^*:\ T_u^*\to T_{su}^*,\ \omega(u)\mapsto\omega(su); \qquad (3.1.12)$$

由 R_s 可诱导出映射

$$R_s^*:\ T_u^*\to T_{us}^*,\ \omega(u)\mapsto\omega(us). \qquad (3.1.13)$$

具体说来, 给定 $\omega(u)=\alpha(u)da+\beta(u)db+\gamma(u)d\phi$, $\omega(u)$ 在映射 L_s^* 之下的像 $\omega(su)$ 应这样来求: 将 $\alpha(u)$, $\beta(u)$, $\gamma(u)$ 分别换为 $\alpha(su)$, $\beta(su)$, $\gamma(su)$, 同时 da, db, $d\phi$ 按下式进行代换:

$$\begin{cases} da\to\cos\phi_0\,da-\sin\phi_0\,db, \\ db\to\sin\phi_0\,da+\cos\phi_0\,db, \\ d\phi\to d\phi. \end{cases} \qquad (3.1.14)$$

求 $\omega(u)$ 在 R_s^* 之下的像 $\omega(us)$ 与此类似, 即一方面以 $\alpha(us)$, $\beta(us)$, $\gamma(us)$ 分别代替 $\alpha(u)$, $\beta(u)$, $\gamma(u)$, 同时施行如下代换:

$$\begin{cases} da \to -(a_0\sin\phi+b_0\cos\phi)d\phi+da, \\ db \to (a_0\cos\phi-b_0\sin\phi)d\phi+db, \\ d\phi \to d\phi. \end{cases} \tag{3.1.15}$$

(3.1.14)和(3.1.15)二式分别来自(3.1.9)和(3.1.10)二式.

§3.2 运动密度

3.2.1 左不变1形式与右不变1形式

为了建立运动密度概念，需要先介绍所谓左不变1形式和右不变1形式.

在映射 L_s^* 下保持不变的1形式称为*左不变的*，在映射 R_s^* 下保持不变的1形式称为*右不变的*.

为了具体地描述左不变1形式，只需注意到矩阵

$$\Omega_L = u^{-1}du \tag{3.2.1}$$

具有左不变性. 事实上，我们有

$$L_s^*\Omega_L = (su)^{-1}d(su) = u^{-1}s^{-1}s\,du = u^{-1}du = \Omega_L, \tag{3.2.2}$$

此式表明 Ω_L 确实是左不变的. 从而矩阵 Ω_L 的所有元素是左不变1形式. 由 (3.1.3) 和 (3.1.4) 二式有

$$\Omega_L = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & -a\cos\phi-b\sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi & a\sin\phi-b\cos\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} -\sin\phi\,d\phi & -\cos\phi\,d\phi & da \\ \cos\phi\,d\phi & -\sin\phi\,d\phi & db \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -d\phi & \cos\phi\,da+\sin\phi\,db \\ d\phi & 0 & -\sin\phi\,da+\cos\phi\,db \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2.3}$$

于是我们得到如下的左不变1形式:

$$\omega_1 = \cos\phi\,da+\sin\phi\,db,\quad \omega_2 = -\sin\phi\,da+\cos\phi\,db,$$
$$\omega_3 = d\phi. \tag{3.2.4}$$

显然，$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 是线性无关的。

由于 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 是左不变的，因此它们的带常系数的任何线性组合也是左不变1形式。并且不难证明，这样的线性组合已经穷尽了 $\mathfrak{M}$ 上一切左不变1形式，即 $\mathfrak{M}$ 上任一左不变1形式都可表示成为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 的带常系数的线性组合。事实上，由于 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 是线性无关的，它们构成 T_u^* 的一组基，从而每个1形式 $\omega(u)$ 皆可表示为

$$\omega(u)=\alpha(u)\omega_1+\beta(u)\omega_2+\gamma(u)\omega_3.$$

如果再假定 $\omega(u)$ 是左不变的，则应有

$$\omega(su)=\alpha(su)\omega_1(su)+\beta(su)\omega_2(su)+\gamma(su)\omega_3(su)=\omega(u).$$

但由于已知 ω_i 是左不变的，即 $\omega_i(su)=\omega_i(u)\ (i=1, 2, 3)$，从而有

$$[\alpha(su)-\alpha(u)]\omega_1(u)+[\beta(su)-\beta(u)]\omega_2(u) + [\gamma(su)-\gamma(u)]\omega_3(u)=0.$$

再由 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 的线性无关性，有

$$\alpha(su)=\alpha(u),\quad \beta(su)=\beta(u),\quad \gamma(su)=\gamma(u).$$

因为这些等式对任何 $s\in\mathfrak{M}$ 成立，故 $\alpha(u), \beta(u), \gamma(u)$ 皆为常数。总之，我们求出了 (3.2.4) 式中的三个左不变1形式，实质上就求出了 $\mathfrak{M}$ 上所有的左不变1形式。

求右不变1形式的讨论完全类似，简要叙述如下。矩阵

$$\Omega_R=du\,u^{-1} \tag{3.2.5}$$

具有右不变性：

$$R_s^*\Omega_R=d(us)(us)^{-1}=du\,s\,s^{-1}u^{-1}=\Omega_R.$$

由 (3.1.3) 和 (3.1.4) 二式有

$$\Omega_R=\begin{pmatrix} 0 & -d\phi & bd\phi+da \\ d\phi & 0 & -ad\phi+db \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2.6}$$

从而得到三个线性无关的右不变1形式：

$$\omega^1=bd\phi+da,\ \omega^2=-ad\phi+db,\ \omega^3=d\phi. \tag{3.2.7}$$

与前面一样，$\omega^1, \omega^2, \omega^2$ 的带常系数的线性组合是右不变1形式，

并且 $\mathfrak{M}$ 上任一右不变1形式皆可表示成这样的线性组合.

3.2.2 运动密度

有了上述准备之后,现在可以引入运动密度概念了.

首先,由于 ω_1, ω_2, ω_3 皆为左不变1形式,因此它们的外积

$$dK=\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3=da\wedge db\wedge d\phi \tag{3.2.8}$$

是左不变的3级微分形式(简称3形式). 今设

$$\psi=f(u)da\wedge db\wedge d\phi=f(u)\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3$$

为任意一个左不变的3形式,应有

$$f(su)\omega_1(su)\wedge\omega_2(su)\wedge\omega_3(su)=f(u)\omega_1(u)\wedge\omega_2(u)\wedge\omega_3(u).$$

由于诸 ω_i 是左不变的,即

$$\omega_i(su)=\omega_i(u),\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

由此推知

$$f(su)=f(u).$$

因为这一等式对任何 $s\in\mathfrak{M}$ 成立, 故 $f(u)$ 必定是常数. 这就表明,若不计一个常数因子,(3.2.8)式中的 dK 是 $\mathfrak{M}$ 上唯一的左不变3形式.

其次,考虑 ω^1, ω^2, ω^3 的外积,得到

$$\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3=da\wedge db\wedge d\phi=dK. \tag{3.2.9}$$

依据类似的推理可知,若不计一个常数因子, $dK=da\wedge db\wedge d\phi$ 也是 $\mathfrak{M}$ 上唯一的右不变3形式.

再次,微分恒等式 $uu^{-1}=e$ (单位矩阵)可得

$$du\,u^{-1}+u\,du^{-1}=0,$$

即

$$(u^{-1})^{-1}du^{-1}=-du\,u^{-1},$$

亦即

$$\Omega_L(u^{-1})=-\Omega_R(u). \tag{3.2.10}$$

此式表明,前面得到的 $dK=da\wedge db\wedge d\phi$ 具有如下的性质:

$$dK(u^{-1})=-dK(u). \tag{3.2.11}$$

由于我们仅考虑非负密度, 因而 (3.2.11) 式实际上表明,当着以 u^{-1} 代替 u 时, dK 不变. 我们把这一事实称为 dK 关于逆运动的不变性,简称为反演不变性或逆不变性.

综上所述，3 形式

$$dK=\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3=\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3=da\wedge db\wedge d\phi \qquad (3.2.12)$$

是具有左不变性、右不变性及反演不变性的 3 形式；不计一个常数因子，它是具有这些性质的唯一的 3 形式.

(3.2.12) 式所表示的 3 形式 dK 称为平面上运动群 $\mathfrak{M}$ 的**运动密度**. 显然，运动密度 $dK=da\wedge db\wedge d\phi$ 正好是运动群的参数空间 $\mathfrak{M}$ 的体积元.

运动群的参数空间 $\mathfrak{M}$ 中的一个区域 X，亦即此域中之点所对应的那些运动所构成的集. dK 在区域 X 上的积分便是 X 所对应的运动之集的测度，叫做集 X 的运动测度.

3.2.3 运动测度的几何意义

为了帮助读者理解运动测度及其不变性，这里作一点直观的解释. 设想平面上有二区域 K_0 和 K，其中 K_0 为位置固定的区域，而区域 K 的位置是可变动的. 为醒目起见，图中将 K 画成一矩形；其实 K 及 K_0 是什么样的形状都无碍于以下的讨论. 假定 K 有一"初始位置"(附图中所示情形，K 的初始位置处于第一象限且矩形有两条边位于坐标轴上). 任意一个运动 $u\in\mathfrak{M}$，将把 K 带到一个新的位置 uK (uK 与 K 全等). 现在我们考虑能把 K 带到与 K_0 相交的位置的那些运动 u. 这些运动所成的集可记为

$$X=\{u:\ uK\cap K_0\neq\emptyset\}\ \text{或}\ uK\cap K_0\neq\emptyset.$$

按刚才的定义，集 X 的运动测度为

$$m\{u: uK\cap K_0\neq\emptyset\}=\int_{uK\cap K_0\neq\emptyset} dK, \qquad (3.2.13)$$

其中 dK 为运动密度(3.2.12). 应当留意，与第二章的讨论相比，观念有所改变. 按第二章的说法，应是求与 K_0 相交的一切全等于 K 的图形的集的测度. 而按现在的观点，在设定 K 的初始位置的前提下，与 K_0 相交的 K 的每一位置对应于一个运动，然后求这些运动组成的集的测度.

现在来看看运动密度的几个不变性的直观意义. 先说运动密

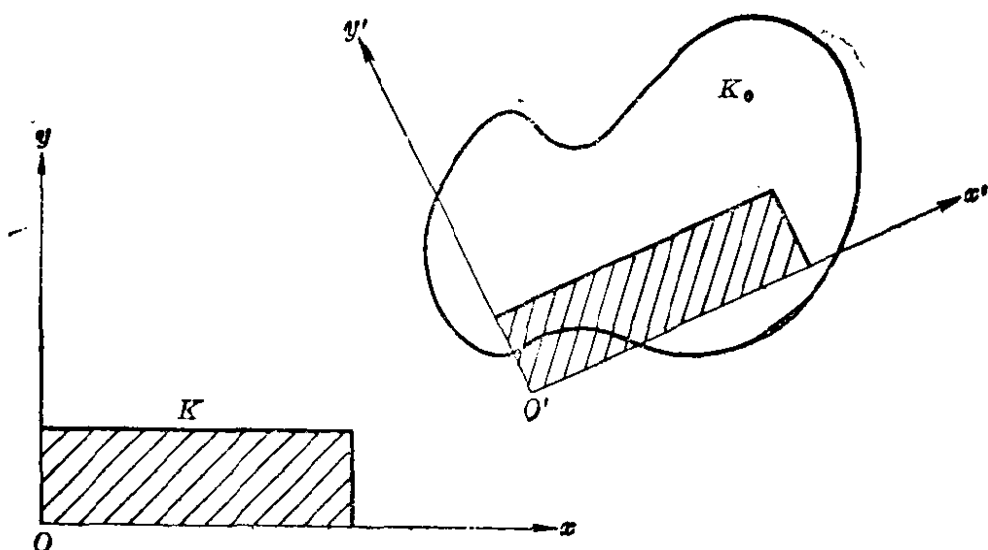


图 3-2

度的左不变性．设 s 为任意给定的一个运动．s 把 K_0 带到新的位置 sK_0．对于这个固定的 sK_0，仍考虑与刚才同样的问题，即考虑运动的集 $X_1=\{v:\ vK\cap(sK_0)\neq\emptyset\}$ 的测度．因为

$$X_1=\{v:\ vK\cap(sK_0)\neq\emptyset\}=\{su:\ (su)K\cap(sK_0)\neq\emptyset\},$$

并且 $(su)K\cap(sK_0)\neq\emptyset$ 等价于 $uK\cap K_0\neq\emptyset$，可见运动的集 X_1 是运动的集 $X=\{u:\ uK\cap K_0\neq\emptyset\}$ 经左推移 L_s 的结果，即 $X_1=L_sX$．由运动密度的左不变性，可知 $m(X_1)=m(X)$．这就是说，运动密度的左不变性体现了下述几何事实：把 K 带到与 K_0 相交的运动的集之测度，与 K_0 置于平面的何处无关．运动密度的右不变性的几何意义可作相仿的解释．仍设 s 为任意给定的运动．在 s 的作用下，K 的起始位置变到了 sK．因为

$$\begin{aligned}X_2&=\{v:\ v(sK)\cap K_0\neq\emptyset\}\\&=\{us^{-1}:\ (us^{-1})(sK)\cap K_0\neq\emptyset\}\\&=\{us^{-1}:\ uK\cap K_0\neq\emptyset\},\end{aligned}$$

可见 X_2 是集 $X=\{u:\ uK\cap K_0\neq\emptyset\}$ 经右推移 $R_{s^{-1}}$ 的结果，$X_2=R_{s^{-1}}X$．由运动密度的右不变性，可知 $m(X_2)=m(X)$．亦即在求上述测度时，运动密度的右不变性体现了与 K 的起始位置选取无关这一几何事实．至此，我们已经看出，不论 K_0 置于何处，也不论 K 的初始位置如何，运动集 $X=\{u:\ uK\cap K_0\neq\emptyset\}$ 的运动

测度总是一样的．如是，现在这种求运动集的测度的观念与原先求几何元素集的测度的说法就一致起来了．由刚才的讨论还可看出，置放固定图形的平面上的坐标系(固定标架)，以及与动图形附着在一起的坐标系(活动标架)，都可以任意选取．最后我们来考察运动密度的反演不变性．由于条件 $uK\cap K_0\neq\emptyset$ 等价于 $K\cap u^{-1}K_0\neq\emptyset$，故知运动集 $X_3=\{v: vK_0\cap K\neq\emptyset\}$ 是由集 $X=\{u: uK\cap K_0\neq\emptyset\}$ 取运动的反演而来(即对 X 中每个运动取其逆，便得集 X_3)．由运动密度的反演不变性可知 $m(X_3)=m(X)$．此式表明，当着交换 K_0 与 K 的地位，即视 K 为位置固定的区域、K_0 为位置可变动的区域，把 K_0 带到与 K 相交的运动的集之测度与原先所求的测度相等．

3.2.4 运动密度的其他形式

若不用参数 a, b, ϕ 来确定运动，而以其他适当的参数确定运动，则运动密度 dK 将取另外的形式．

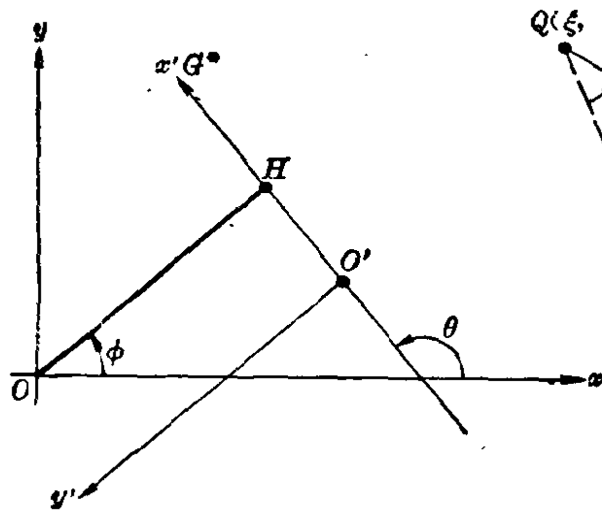


图 3-3

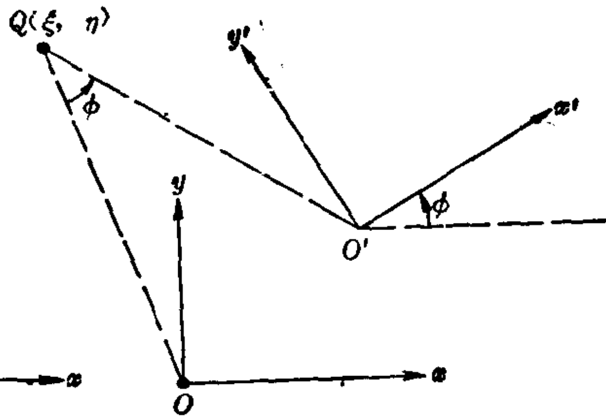


图 3-4

如图，取有向直线 G^* (即 $o'x'$ 轴)的坐标 p 和 ϕ，以及 t (轴 $o'x'$ 上有向线段 $o'H$ 的值)作为确定运动的参数．我们有

$$a=p\cos\phi+t\sin\phi,\ b=p\sin\phi-t\cos\phi,\ \theta=\phi+\frac{\pi}{2}. \quad (3.2.14)$$

从而有 $$dK=da\wedge db\wedge d\theta=dp\wedge d\phi\wedge dt,$$

即

$$dK = dG^* \wedge dt. \tag{3.2.15}$$

以下再介绍运动密度的一种形式. 此形式的导出基于下述事实: 除去单纯的平移而外(单纯的平移仅依赖于两个参数, 形成零测度集), 每个运动 u 都可以通过绕平面上某点 $Q(\xi, \eta)$ 作一旋转来实现. 运动 u 指定后, 这样的 Q 便随之确定. Q 称为运动 u 的旋转中心. 图中所示运动 $u(a, b; \phi)$, 可以通过绕 Q 旋转角度 ϕ 来实现. 利用关系

$$\xi^2 + \eta^2 = (\xi - a)^2 + (\eta - b)^2,$$

$$(\xi^2 + \eta^2)\cos\phi = \xi(\xi - a) + \eta(\eta - b)$$

可得运动密度的如下表示形式:

$$dK = 4\sin^2(\phi/2)\, d\xi \wedge d\eta \wedge d\phi. \tag{3.2.16}$$

§3.3 Poincaré 公式

3.3.1 运动密度的又一表示形式

本节要研讨的问题是: 平面上有定曲线 Γ_0 及位置可变动的曲线 Γ_1, 我们希望计算运动集 $\{u: u\Gamma_1 \cap \Gamma_0 \neq \emptyset\}$ 的测度. 为此需要导出运动密度的一种新的形式. 不难看出, 若知道二曲线相交于何处以及交角的大小, 即若知道 Γ_0 和 Γ_1 在交点处各自对应的弧长参数 s_0 和 s_1 以及交点处二切线的夹角 θ, 则动曲线 Γ_1 的位置就完全确定了. 这就是说, 运动 u 可由参数 s_0, s_1 及 θ 确定. 以下我们来寻求用 s_0, s_1, θ 表示的运动密度形式.

设 Γ_0 为逐段光滑曲线, 位置固定于平面上. xoy 为固定标架, Γ_0 在 xoy 中的方程为

$$x = x(s_0),\ y = y(s_0) \tag{3.3.1}$$

其中 s_0 为弧长参数. 又, 设逐段光滑曲线 Γ_1 为动曲线, 在活动标架 XO_1Y 中的方程为

$$X = X(s_1),\ Y = Y(s_1) \tag{3.3.2}$$

其中 s_1 为弧长参数. Γ_0, Γ_1 在交点 P 处的切线分别记为 PT_0,

PT_1. PT_0 对 ox 轴的倾角记为 α_0, PT_1 对 O_1X 轴的倾角记为 α_1, PT_0 与 PT_1 的夹角记为 θ. 此外，设活动标架由参数 a, b, ϕ 所确定。

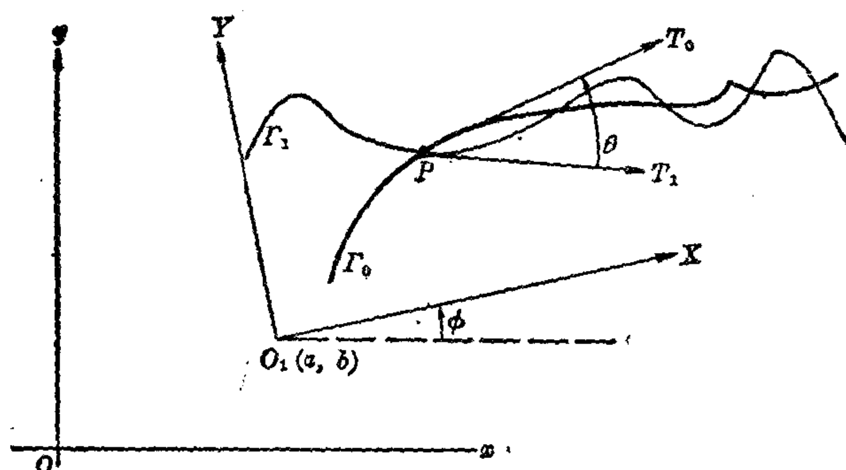


图 3-5

若 Γ_0, Γ_1 在交点 P 处各自对应的参数为 s_0 和 s_1, 则有

$$x(s_0)=a+X(s_1)\cos\phi-Y(s_1)\sin\phi,$$
$$y(s_0)=b+X(s_1)\sin\phi+Y(s_1)\cos\phi.$$

微分之，得

$$\begin{aligned}da=&\frac{dx}{ds_0}ds_0-\left(\frac{dX}{ds_1}\cos\phi-\frac{dY}{ds_1}\sin\phi\right)ds_1\\&+(X\sin\phi+Y\cos\phi)d\phi,\\db=&\frac{dy}{ds_0}ds_0-\left(\frac{dX}{ds_1}\sin\phi+\frac{dY}{ds_1}\cos\phi\right)ds_1\\&-(X\cos\phi-Y\sin\phi)d\phi.\end{aligned}$$

对以上二式以及 $d\phi$ 作外积，并注意到

$$\frac{dx}{ds_0}=\cos\alpha_0,\ \frac{dy}{ds_0}=\sin\alpha_0,\ \frac{dX}{ds_1}=\cos\alpha_1,\ \frac{dY}{ds_1}=\sin\alpha_1,$$

可得下式:

$$\begin{aligned}dK_1&=da\wedge db\wedge d\phi\\&=\sin(\alpha_0-\alpha_1-\phi)ds_0\wedge ds_1\wedge d\phi.\end{aligned}\tag{3.3.3}$$

注意，倾角 α_0, α_1 按定义应适合 $0\leqslant\alpha_0<\pi$, $0\leqslant\alpha_1<\pi$; 由 ox 到 O_1X 的角 ϕ 满足 $0\leqslant\phi<2\pi$; 又，此处曲线交角 θ 规定为由 PT_1 到 PT_0

的绝对值不超过 π 的角，$-\pi<\theta\leqslant\pi$. 因而

$$-3\pi<\alpha_0-\alpha_1-\phi<\pi.$$

当 $-\pi<\alpha_0-\alpha_1-\phi<\pi$ 时，

$$\alpha_0-\alpha_1-\phi=\theta;$$

当 $-3\pi<\alpha_0-\alpha_1-\phi\leqslant-\pi$ 时，

$$\alpha_0-\alpha_1-\phi=\theta-2\pi.$$

由于我们仅考虑非负密度，故不论哪种情形，(3.3.3) 式中的 $\sin(\alpha_0-\alpha_1-\phi)$ 均可用 $|\sin\theta|$ 代替. 又因 α_0, α_1 仅分别依赖于 s_0, s_1，故不论在哪种情形均有 $d\theta=\alpha_0'ds_0-\alpha_1'ds_1-d\phi$，由此可见 (3.3.3) 式中的 $d\phi$ 可用 $d\theta$ 代替. 故最后得到用 s_0, s_1 及 θ 表示的运动密度形式:

$$dK_1=|\sin\theta|\,ds_0\wedge ds_1\wedge d\theta. \tag{3.3.4}$$

3.3.2 Poincaré 公式

有了运动密度形式(3.3.4)以后，立即可导出 Poincaré 公式. Γ_0 和 Γ_1 除满足刚才的假定外，今再设其长度分别为 L_0 和 L_1. 取(3.3.4)式两边的积分，积分域为 $\{u: u\Gamma_1\cap\Gamma_0\neq\emptyset\}$ (换言之，即动曲线 Γ_1 的一切与 Γ_0 相交的位置的集). 左方为

$$\int_0^{L_0}ds_0\int_0^{L_1}ds_1\int_{-\pi}^{\pi}|\sin\theta|\,d\theta=4L_0L_1. \tag{3.3.5}$$

至于右方，需注意若对于 Γ_1 的某个位置二曲线有 n 个交点，那么此位置应 n 次地重复计入，故右方为

$$\int_{\Gamma_1\cap\Gamma_0\neq\emptyset}n\,dK_1.$$

从而得到 Poincaré 公式:

$$\int_{\Gamma_1\cap\Gamma_0\neq\emptyset}n\,dK_1=4\,L_0\,L_1. \tag{3.3.6}$$

此公式亦可写作

$$\int n\,dK_1=4\,L_0\,L_1, \tag{3.3.7}$$

意思是说积分域为全空间 $\mathfrak{M}$; 盖因当 $\Gamma_1\cap\Gamma_0=\emptyset$ 时交点数 $n=0$.

密度形式 (3.3.4) 在 Poincaré 公式的证明中起了关键的作用，这里，再介绍由密度形式(3.3.4)引出的一个公式，它在下面证明 Blaschke 公式时要用到．将 Γ_1 与 Γ_0 的 n 个交点处的交角分别记为 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$. 于 (3.3.4) 式双方同乘以 $|\theta_i|$ 后取积分，得到

$$\int_{\Gamma_1\cap\Gamma_0\neq\emptyset}\sum_{i=1}^{n}|\theta_i|\,dK_1=2\pi L_0L_1. \tag{3.3.8}$$

§3.4 Blaschke 运动基本公式

Poincaré 公式所回答的问题是：如何求出与定曲线相交的动曲线集的测度．现在我们所要处理的问题是：探讨与定区域相交的动区域集的测度．这个问题的答案就是著名的 Blaschke 运动基本公式．它是平面积分几何中最基本的定理．

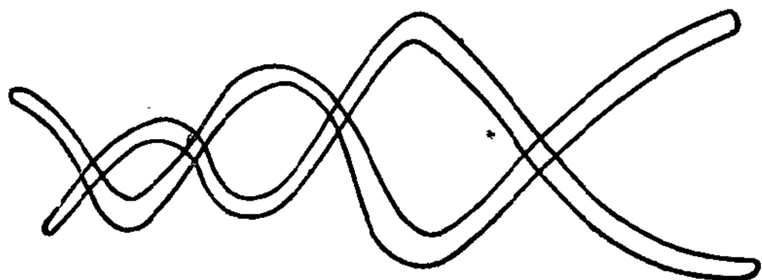


图 3-6

现在我们要讨论的问题可以看作是 Poincaré 公式所处理的问题的进一步发展，因为我们不妨把二曲线相交视为二区域相交的极限情形(参看图 3-6)．这一看法对下面即将展开的讨论是一种启示：在 Poincaré 公式中二曲线的交点数目 n 是密度 dK_1 的“权”；如今对于二区域 D_1 与 D_0 相交的情形，起同样作用的应当是交集 $D_1\cap D_0$ 的“块数”．为了刻划这个“块数”，下面先介绍全曲率概念．然后叙述并证明 Blaschke 公式．

3.4.1 闭曲线及平面区域的全曲率

设 Γ 为平面上具有连续曲率的定向曲线．所谓 Γ 的全曲率

由下述积分定义:

$$c(\Gamma)=\int_{\Gamma} \varkappa \, ds, \tag{3.4.1}$$

其中 s 为 Γ 的弧长. 或者,利用 $\varkappa=d\tau/ds$, 将 (3.4.1) 改写为

$$c(\Gamma)=\int_{\Gamma} d\tau, \tag{3.4.2}$$

其中 τ 表示 ox 正旋至曲线的切线正向的角. 积分沿 Γ 的正向进行.

全曲率概念可推广到逐段光滑曲线的场合. 设定向曲线 Γ 由 m 段光滑弧 $a_i=A_iA_{i+1}$($i=1, 2, \cdots, m$; 规定 $A_{m+1}=A_1$)组成. a_{i-1} 在 A_i 处的切线到 a_i 在 A_i 处的切线的角(即角点 A_i 处之外角)记为 $\theta(A_i)$, $-\pi<\theta(A_i)\leqslant\pi$. Γ 的全曲率可定义如下:

$$c(\Gamma)=\sum_{i=1}^{m}\int_{a_i} d\tau+\sum_{i=1}^{m}\theta(A_i). \tag{3.4.3}$$

无重点的曲线叫做**简单曲线**. 如所周知, 任意一条光滑或逐段光滑的简单闭曲线, 其全曲率必为 $\pm 2\pi$(正负号依赖于曲线正向的选择). 这就是所谓**切线回转定理**.

利用闭曲线的全曲率概念可以规定区域的全曲率. 设 D 是由有限条逐段光滑的简单闭曲线做边界围成的区域, 边界的正向按习惯方式取定(即沿此方向前进时, 区域常在左侧). 组成 ∂D 的各围道的全曲率之代数和, 称为 D 的全曲率, 记为 $c(D)$. 例如下图中, (a) 款, $c(D)=-2\pi$; (b) 款, $c(D)=2\pi$.

区域的全曲率总是 2π 的整数倍. 将此整数记为 $\chi(D)$, 则有

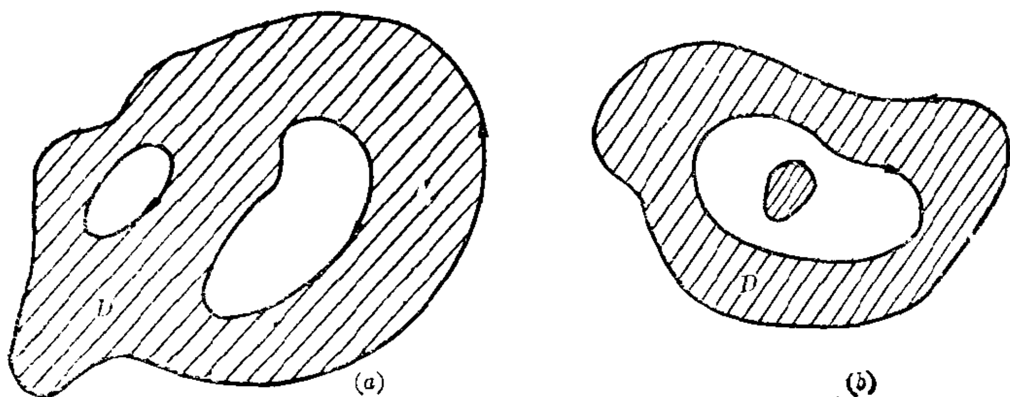


图 3-7

$$c(D)=2\pi\chi(D). \tag{3.4.4}$$

整数 $\chi(D)$ 称为区域 D 的 Euler 示性数.

关于全曲率及回转定理的严谨表述，见陈省身《欧氏空间中的曲线和曲面》.[1]

3.4.2 Blaschke 运动基本公式

定理 设 D_0 为有限条逐段光滑的简单闭曲线围成的区域，D_0 的全曲率为 c_0，面积为 F_0，周长为 L_0. D_1 为同类型区域，其全曲率、面积及周长各为 c_1, F_1 及 L_1. 又，记交集 $D_1\cap D_0$ 之全曲率为 c_{01}，即 $c_{01}=c(D_1\cap D_0)$. 设 D_0 位置固定，D_1 为动区域，运动密度记为 dK_1. 则有

$$\int_{D_1\cap D_0\neq\emptyset} c_{01}\,dK_1=2\pi(F_0c_1+F_1c_0+L_0L_1). \tag{3.4.5}$$

公式 (3.4.5) 称为 Blaschke 运动基本公式.

证明 先介绍必要的记号. ∂D_j (D_j 的边界)的那些光滑弧段记为 a_i^j ($j=0, 1$)，而 ∂D_j 的角点记为 A_i^j，相应的外角记为 $\theta(A_i^j)$ (注意，a_i^0, A_i^0; a_i^1, A_i^1 的下标各有其变域). 按区域的全曲率定义，有

$$c_j=\sum_i\int_{a_i^j}d\tau+\sum_i\theta(A_i^j),\ j=0, 1. \tag{3.4.6}$$

证明的大致线索是：设法将 c_{01} 表达出来，然后计算 (3.4.5) 式左方的积分. 我们知道 c_{01} 是区域 $D_1\cap D_0$ 的全曲率，亦即

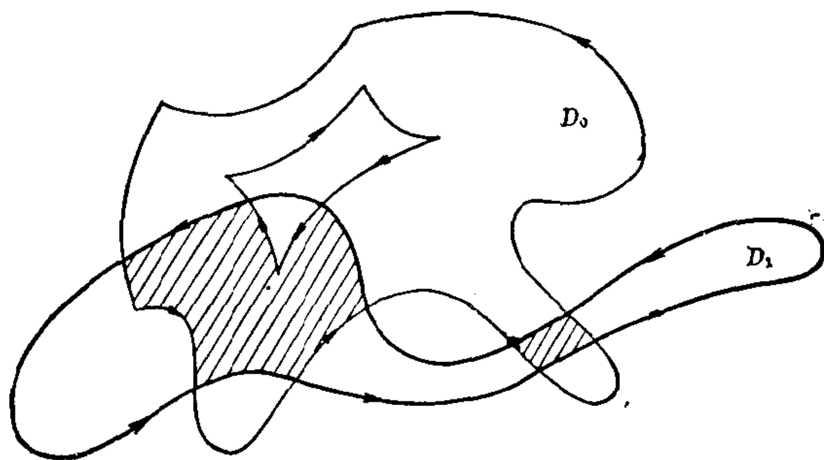


图 3-8

$D_1\cap D_0$ 的边界的全曲率. $D_1\cap D_0$ 的边界是由"含于 D_1 之中的 D_0 的边界"和"含于 D_0 中的 D_1 的边界"组成, 它含有 ∂D_0 和 ∂D_1 的原有的某些角点,还包含这两种边界在交接处新产生的角点(这些角点处的外角记为 θ_h). 以 p 表示 ∂D_0 上的流动点, 以 q 表示 ∂D_1 上的流动点,则有

$$c_{01}=\int_{p\in D_1} d\tau\ (s_0)+\int_{q\in D_0} d\tau\ (s_1)+\sum_{A_i^0\in D_1}\theta(A_i^0)+\sum_{A_i^1\in D_0}\theta\ (A_i^1)+\sum_h\theta_h, \tag{3.4.7}$$

其中 s_0, s_1 分别为 ∂D_0, ∂D_1 上的弧长参数. (3.4.7) 式右方五部分依次简记为 P_1, P_2, P_3, P_4 及 P_5. 以下分别考虑每一部分的积分. 积分

$$I_1=\int_{D_1\cap D_0\neq\emptyset}(P_1)dK_1=\int_{D_1\cap D_0\neq\emptyset}\left(\int_{p\in D_1} d\tau\ (s_0)\right)dK_1$$

的意思是: 先固定 D_1 于某个位置, 让 p 在含于 D_1 内的 ∂D_0 上流动; 然后让 D_1 变动, 取一切与 D_0 相交的位置. 此积分亦可作如下考虑: 交换积分次序, 即先让 p 固定于 ∂D_0 之某处, D_1 取含有 p 点的一切位置; 然后再让 p 在 ∂D_0 上变动. 于是有

$$\begin{aligned}I_1&=\int_{D_1\cap D_0\neq\emptyset}\left(\int_{p\in D_1} d\tau(s_0)\right)dK_1=\int_{\partial D_0}d\tau\ (s_0)\int_{p\in D_1} dK_1\\&=2\pi F_1\int_{\partial D_0}d\tau(s_0)=2\pi F_1\sum_i\int_{a_i^0}d\tau(s_0).\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

由运动密度的反演不变性, 交换 D_0, D_1 之地位, 有

$$\begin{aligned}I_2&=\int_{D_1\cap D_0\neq\emptyset}(P_2)dK_1=\int_{D_1\cap D_0\neq\emptyset}\left(\int_{q\in D_0} d\tau\ (s_1)\right)dK_1\\&=\int_{D_0\cap D_1\neq\emptyset}\left(\int_{q\in D_0} d\tau\ (s_1)\right)dK_0.\end{aligned}$$

再依照导出 (3.4.8) 式的同样的推理, 有

$$\begin{aligned}I_2&=\int_{D_1\cap D_0\neq\emptyset}\left(\int_{q\in D_0} d\tau\ (s_1)\right)dK_1\\&=2\pi\ F_0\sum_i\int_{a_i^1}d\tau(s_1).\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

对于 (3.4.7) 式右方第三、第四两部分, 积分后为

$$I_3=\int_{D_1\cap D_0\neq\varnothing}(P_3)dK_1=\int_{D_1\cap D_0\neq\varnothing}\Big(\sum_{A_i^0\in D_1}\theta(A_i^0)\Big)dK_1$$

$$=\sum_i\theta(A_i^0)\int_{A_i^0\in D_1}dK_1=2\pi F_1\sum_i\theta(A_i^0),\qquad(3.4.10)$$

$$I_4=\int_{D_1\cap D_0\neq\varnothing}(P_4)dK_1=\int_{D_1\cap D_0\neq\varnothing}\Big(\sum_{A_i^1\in D_0}\theta(A_i^1)\Big)dK_1$$

$$=\int_{D_0\cap D_1\neq\varnothing}\Big(\sum_{A_i^1\in D_0}\theta(A_i^1)\Big)dK_0=\sum_i\theta(A_i^1)\int_{A_i^1\in D_0}dK_0$$

$$=2\pi F_0\sum_i\theta(A_i^1).\qquad(3.4.11)$$

为了求出第五部分的积分，注意诸 θ_h 是 ∂D_0 与 ∂D_1 的正向间的角，在 D_0, D_1 以及 $D_1\cap D_0$ 皆按习惯方式取边界正向的情况下，这些角一般都满足 $0\leqslant\theta_h\leqslant\pi$. 因此利用 (3.3.8) 式有

$$I_5=\int_{D_1\cap D_0\neq\varnothing}(P_5)dK_1=\int_{D_1\cap D_0\neq\varnothing}(\sum\theta_h)dK_1$$

$$=2\pi L_0L_1.\qquad(3.4.12)$$

将(3.4.8), (3.4.9), (3.4.10), (3.4.11)及(3.4.12)五式相加，并利用 (3.4.6) 式,便得到 (3.4.5) 式.

3.4.3 Blaschke 公式的直接推论

Blaschke公式以其高度的普遍性著称. 现在我们来考察这个公式的一些直接推论.

1. 设 D_0 和 D_1 皆为凸域,则 $c_0=c_1=c_{01}=2\pi$. 从而有

$$\int_{D_1\cap D_0\neq\varnothing}dK_1=2\pi(F_0+F_1)+L_0L_1.\qquad(3.4.13)$$

2. 如果区域 D_0, D_1 都是各由一条简单闭曲线围成，这时 $c_0=c_1=2\pi$, $c_{01}=2\pi\nu$, ν 为交集 $D_1\cap D_0$ 的“块数”. 这时公式 (3.4.5) 变成

$$\int_{D_1\cap D_0\neq\varnothing}\nu\,dK_1=2\pi(F_0+F_1)+L_0L_1.\qquad(3.4.14)$$

3. 设 D_0 是有限多个彼此分离的凸域 D_0^i 的并集, $i=1,\cdots,m$. 总面积为 F_0, 总周长为 L_0. 又,设动区域 D_1 由一条简单闭曲线围成,面积为 F_1, 周长为 L_1. 这种情况下,

$$c_0 = 2m\pi,\ c_1 = 2\pi.$$

于是 (3.4.5) 式给出

$$\int_{D_1 \cap D_0 \neq \emptyset} \nu\, dK_1 = 2\pi(F_0 + mF_1) + L_0 L, \tag{3.4.15}$$

其中 ν 为动区域 D_1 所遇到的 D_0^i 的个数. 特别是当 D_0 退化为 m 个点时,则有

$$\int \nu\, dK_1 = 2m\pi F_1, \tag{3.4.16}$$

其中 ν 表示进入动区域 D_1 的点的数目.

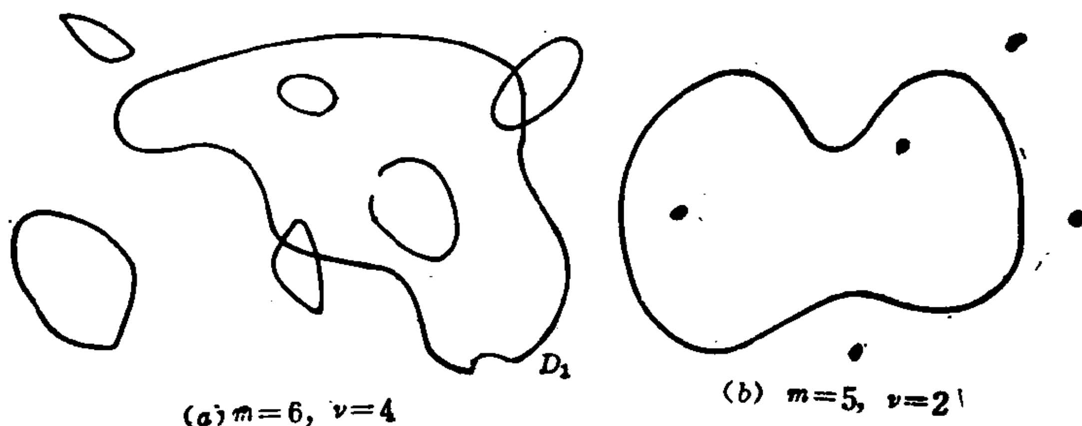


图 3-9

4. $\Gamma_0,\ \Gamma_1$ 如 Poincaré 公式中之假定. $\Gamma_0,\ \Gamma_1$ 可视为由二区域 $D_0,\ D_1$ 退化而来,即看作是 $F_0 = F_1 = 0$、周长分别为 $2L_0$ 和 $2L_1$ 的二区域. 在这种看法下, Γ_0 与 Γ_1 的交点个数 n 相当于交集 $D_1 \cap D_0$ 的块数,故 $c_{01} = n \cdot 2\pi$. 由 Blaschke 公式 (3.4.5) 得到

$$\int_{\Gamma_1 \cap \Gamma_0 \neq \emptyset} n\, dK_1 = 4L_0 L_1.$$

也就是说, Poincaré 公式可视为 Blaschke 公式之特款.

本章参考文献

[1] 陈省身、陈维恒,《微分几何讲义》,附录一,北京大学出版社, 1983.

[2] L. A. Santaló, «Integral Geometry and Geometric Probability», 1976.

第 四 章

平面积分几何的应用

上一章介绍了平面积分几何的基本定理，它们有着广泛的应用．在这里既没有可能也没有必要穷举所有这些方面．我们选择了几个典型的课题，作比较深入细致的讨论．一方面借以展示积分几何在应付某些问题时所特有的作用；另一方面，想通过对这些典型问题的剖析，使读者逐渐学会运用积分几何理论处理问题的方法．

§4.1 等周不等式

等周不等式是几何学中最耐人寻味的课题之一，也是整个数学中一则具有实质性意义的命题．关于平面曲线的经典等周不等式，已有 A. Hurwitz(1902)、E. Schmidt(1939) 等多种巧妙的证法．本节介绍的积分几何证法，亦有其独特之处．

4.1.1 等周不等式的证明

所谓平面曲线的等周不等式，可正式表述如下：

定理 长度一定的所有闭的简单曲线中，圆所围成的面积最大．换言之，若 L 是简单闭曲线 Γ 的长度，F 是 Γ 围成的面积，则有

$$L^2-4\pi F\geqslant 0, \tag{4.1.1}$$

且等号仅当 Γ 为圆时成立.

简单闭曲线 Γ 围成的区域记为 K. 因为我们将利用 Blaschke 公式和 Poincaré 公式来证明定理，所以我们补充假定 Γ 逐段光滑

证明一 首先假定 K 是凸的. 以 K 作为位置固定的区域，以与 K 全等的 K_1 作为动区域. 对 K, K_1 运用 Blaschke 公式，对 K 和 K_1 的边界运用 Poincaré 公式，有

$$\int_{K_1\cap K\neq\emptyset} dK_1 = 4\pi F + L^2, \tag{4.1.2}$$

$$\int_{\partial K_1\cap\partial K\neq\emptyset} n dK_1 = 4L^2. \tag{4.1.3}$$

令 $\quad m_i = m\{u:\ uK_1\cap K\neq\emptyset,\ \partial K_1\cap\partial K$ 恰为 i 个点$\}$,

并注意如下几点：1°. 因 K_1 全等于 K，不能彼此包含，故 $m_0=0$; 2°. ∂K_1 与 ∂K 的交点数为奇数时，∂K_1 与 ∂K 处于相切位置，这些位置构成零测度集，故当 i 为奇数时有 $m_i=0$; 3°. 二凸域 K_1 与 K 相交时，恒有 $c_{01}=c(K_1\cap K)=2\pi$; 4°. 二曲线相交于 n 点时，这些位置当 n 次地重复计入. 我们有

$$m_2+m_4+\cdots = 4\pi F + L^2, \tag{4.1.4}$$

$$2m_2+4m_4+\cdots = 4L^2. \tag{4.1.5}$$

由上述二式有

$$L^2-4\pi F = m_4+2m_6+3m_8+\cdots. \tag{4.1.6}$$

但因一切 $m_i\geqslant 0$，从而证得 (4.1.1) 式.

现设 K 为非凸的. 这时考虑 K 的凸壳 (convex hull) K^*. K^* 的周长 L^*、面积 F^* 与 L、F 间的关系是：$F<F^*$, $L^*<L$，从而有

$$L^2-4\pi F > L^{*2}-4\pi F^* \geqslant 0.$$

值得注意的是，(4.1.6) 式对等周亏格 $\Delta = L^2-4\pi F$ 提供了一种几何解释：以 M_j 表示 ∂K_1 与 ∂K 有等于及多于 j 个交点的位置集之测度，则 $\Delta = \sum_{j=4}^{\infty} M_j$.

证明二 仍设 K 为凸域. 取半径 $R=L/2\pi$ 的圆作为动区域

K_1. 我们注意到，对这样的 K_1 既不可能有 $K_1\subset K$，也不可能有 $K\subset K_1$. 因为否则会导致矛盾. 比如设 $K_1\subset K$，则应有 (G为直线)

$$\int_{G\cap K_1\neq\varnothing} dG<\int_{G\cap K\neq\varnothing} dG,$$

但这是不可能的. $K\subset K_1$ 可类似地排除. 对于 K, K_1 运用二基本公式，有

$$\int_{K_1\cap K\neq\varnothing} dK_1=2\pi F+2\pi^2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2+L^2, \tag{4.1.7}$$

$$\int_{\partial K_1\cap\partial K\neq\varnothing} n dK_1=4L^2. \tag{4.1.8}$$

从而有

$$2\pi F+\frac{3}{2}L^2=m_2+m_4+m_6+\cdots, \tag{4.1.9}$$

$$4L^2=2m_2+4m_4+6m_6+\cdots. \tag{4.1.10}$$

由上述二式，有

$$L^2-4\pi F=2m_4+4m_6+6m_8+\cdots. \tag{4.1.11}$$

从而定理得证. 此式同样也给出了等周亏格之几何解释. 但需注意此处的 m_i 与 (4.1.6) 式中不同.

4.1.2 加强的等周不等式

设 K 为有界凸域，周长和面积分别为 L 和 F. 考虑含于 K 内的最大的圆和包含 K 在其内的最小的圆，前者之半径记为 r_i，后者之半径记为 r_e. 设 r 适合

$$r_i\leqslant r\leqslant r_e, \tag{4.1.12}$$

以半径等于 r 的圆 K_1 作为动区域. 自然，K_1不会含于 K 内也不会包含 K. 因此运用基本公式得

$$2\pi F+2\pi^2r^2+2\pi rL=m_2+m_4+m_6+\cdots, \tag{4.1.13}$$

$$8\pi rL=2m_2+4m_4+6m_6+\cdots. \tag{4.1.14}$$

由以上二式得

$$rL-F-\pi r^2=\frac{1}{2\pi}(m_4+2m_6+3m_8+\cdots). \tag{4.1.15}$$

因为诸 $m_i\geqslant 0$，从而得到 Bonnesen 不等式:

$$rL-F-\pi r^2\geqslant 0, \tag{4.1.16}$$

此不等式对一切满足不等式 (5.1.12) 之 r 皆成立.

将 (4.1.15) 式右方简记为 $\varphi(r)$, 并利用恒等式

$$rL-F-\pi r^2=\frac{L^2}{4\pi}-F-\pi\left(\frac{L}{2\pi}-r\right)^2, \tag{4.1.17}$$

可将 (4.1.15) 式改写为

$$\frac{L^2}{4\pi}-F=\pi\left(\frac{L}{2\pi}-r\right)^2+\varphi(r); \tag{4.1.18}$$

取 $r=r_i$ 及 $r=r_e$, 则有

$$\frac{L^2}{4\pi}-F=\pi\left(\frac{L}{2\pi}-r_i\right)^2+\varphi(r_i),$$

$$\frac{L^2}{4\pi}-F=\pi\left(\frac{L}{2\pi}-r_e\right)^2+\varphi(r_e).$$

二式相加,得

$$\frac{L^2}{4\pi}-F=\frac{1}{2}\left[\pi\left(\frac{L}{2\pi}-r_i\right)^2+\pi\left(\frac{L}{2\pi}-r_e\right)^2+\varphi(r_i)+\varphi(r_e)\right],$$

从而有 $\displaystyle\frac{L^2}{4\pi}-F\geqslant\frac{1}{2}\left[\pi\left(\frac{L}{2\pi}-r_i\right)^2+\pi\left(\frac{L}{2\pi}-r_e\right)^2\right],$

或

$$L^2-4\pi F\geqslant\frac{1}{2}\left[(L-2\pi r_i)^2+(2\pi r_e-L)^2\right], \tag{4.1.19}$$

这是由 Fujiwara、Bol 导出的不等式. 它强于经典的等周不等式. 此式表明仅当同时有

$$r_i=L/2\pi,\ r_e=L/2\pi$$

时,才有 $L^2-4\pi F=0$, 其几何意义不言自明.

利用 $2(x^2+y^2)\geqslant(x+y)^2$, 由 (4.1.19) 式得到

$$L^2-4\pi F\geqslant\pi^2(r_e-r_i)^2, \tag{4.1.20}$$

此形式由 Bonnesen 导出.

通过以上的讨论我们看到,在研究等周不等式及其推广当中,积分几何方法所起的特有的作用. 这里顺便提一下我们对 Hurwitz 证明的认识. 平面曲线的等周不等式的 Hurwitz 证明十分精巧而初等,为目前绝大多数微分几何教程所采用. 这一证

法的奥妙何在呢？从积分几何的角度来看，Hurwitz 证明中那个圆的直径 ($2r$) 与闭凸曲线(如前所说，仅须就凸的情形讨论)的某个宽度相等，这样的圆与凸域不能互相包含，从而可推得(4.1.16)式——而达到这一步正是 Hurwitz 证明中的关键.

4.1.3 等周亏格的上界估计

关于等周亏格 $\Delta=L^2-4\pi F$ 的上界，有下述估计：

定理 假设凸域 K_0 的边界 ∂K_0 具有连续曲率半径 ρ，ρ 的最小值记为 ρ_m，最大值记为 ρ_M. 又，K_0 的周长和面积分别为 L 和 F. 则有

$$\Delta=L^2-4\pi F\leqslant\pi^2(\rho_M-\rho_m)^2. \tag{4.1.21}$$

证明一 首先讨论一个更一般的问题. 设 K_1 为动凸域，∂K_1 亦具有连续曲率半径. 我们希望解决下面二问题：

问题 A. 若 ∂K_1 的最大曲率半径不超过 ρ_m，求 $m\{K_1: K_1\subset K\}$；

问题 B. 若 ∂K_1 的最小曲率半径大于或等于 ρ_M，求 $m\{K_1: K_1\supset K\}$.

设平面上固定标架为 xoy，并于 K_1 上取定活动标架 $x'o'y'$. 先设 $o'x'$ 与 ox 保持平行(即只允许 K_1 作平移)，并设 K_0，K_1 分别关于 xoy，$x'o'y'$ 的支持函数为 $p_0(\alpha)$，$p_1(\alpha)$. 为确定起见，现在我们讨论问题 A. 当 K_1 位于 K_0 之内、且 ∂K_1 保持与 ∂K_0 相切而作平移时，则 o' 的轨迹围成一个以 $p(\alpha)=p_0(\alpha)-p_1(\alpha)$ 为支持函数的凸集(因 $p+p''=p_0+p_0''-(p_1+p_1'')=\rho-\rho_1>0$). K_1 在 K_0 内作平移的位置集的测度正好等于此凸集之面积. 由 (1.2.13) 式，此凸集之面积为

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p^2-p'^2)d\phi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p_0^2-p_0'^2)d\phi$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p_1^2-p_1'^2)d\phi-\int_0^{2\pi}(p_0p_1-p_0'p_1')d\phi. \tag{4.1.22}$$

上式右方前两项分别为 K_0、K_1 之面积 F_0、F_1. 至于最后一项，回顾(1.4.3)式，K_0 与 K_1 之混合凸集 K_{01}(即以 $p_0(\alpha)+p_1(\alpha)$ 为支

持函数的凸集)的面积为

$$F_{01}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p_0p_1-p_0'p_1')d\phi.$$

故 (4.1.22) 式成为

$$m\{K_1: K_1\subset K_0 \text{ 且 } K_1 \text{ 无旋转}\}=F_0+F_1-2F_{01}. \quad (4.1.23)$$

若允许旋转，则有

$$m\{K_1: K_1\subset K_0\}=2\pi F_0+2\pi F_1-2\int_0^{2\pi}F_{01}(\theta)d\theta$$

$$=2\pi(F_0+F_1)-L_0L_1, \quad (4.1.24)$$

最后一步运用了 (1.4.7) 式.

对于问题 B，由运动密度的反演不变性，其结果与问题 A 相同，即

$$m\{K_1: K_1\supset K_0\}=m\{K_0: K_0\subset K_1\}$$

$$=2\pi(F_0+F_1)-L_0L_1. \quad (4.1.25)$$

以 K_r 表示半径为 r 的圆. 若 $r\leqslant\rho_m$，考虑测度

$$m\{K_r: K_r\subset K_0\};$$

若 $r\geqslant\rho_M$，则考虑测度

$$m\{K_r: K_r\supset K_0\}.$$

不管属于哪种情形，这样的测度均以 m_0 表之. 因此，根据 (4.1.24) 和 (4.1.25) 二式，在 $r\leqslant\rho_m$ 或 $r\geqslant\rho_M$ 的假定下，有

$$\frac{m_0}{2\pi}=F+\pi r^2-Lr. \quad (4.1.26)$$

由于 $m_0\geqslant 0$，故有

$$F+\pi r^2-Lr=\pi\left(\frac{L}{2\pi}-r\right)^2-\left(\frac{L^2}{4\pi}-F\right)\geqslant 0. \quad (4.1.27)$$

特别说来，对 $r=\rho_m$ 及 $r=\rho_M$，有

$$\begin{aligned}\frac{L^2}{4\pi}-F&\leqslant\pi\left(\frac{L}{2\pi}-\rho_m\right)^2,\\ \frac{L^2}{4\pi}-F&\leqslant\pi\left(\rho_M-\frac{L}{2\pi}\right)^2.\end{aligned} \quad (4.1.28)$$

注意 $\rho_m\leqslant\frac{L}{2\pi}\leqslant\rho_M$，由上面二不等式有

$$\frac{L^2}{4\pi}-F\leqslant\pi\left(\frac{L}{2\pi}-\rho_m\right)\left(\rho_M-\frac{L}{2\pi}\right). \qquad (4.1.29)$$

再利用熟知的初等不等式 $4xy\leqslant(x+y)^2$，可得

$$L^2-4\pi F\leqslant\pi^2(\rho_M-\rho_m)^2. \qquad (4.1.30)$$

证明二 刚才的证法，关键在于导出 (4.1.26) 式．其实我们可更方便地导出此式．以半径为 r 的圆作为 K_1，对 K_0，K_1 运用 Blaschke 公式和 Poincaré 公式，则有

$$2\pi F+2\pi^2r^2+2\pi rL=m_0+m_2+m_4+m_6+\cdots, \qquad (4.1.31)$$

$$8\pi rL=2m_2+4m_4+6m_6+\cdots. \qquad (4.1.32)$$

自然，在(4.1.31)中，对于既不会出现 $K_1\subset K_0$、也不会出现 $K_1\supset K_0$ 的那些 r，必有 $m_0=0$．由此二式有

$$F+\pi r^2-Lr=\frac{1}{2\pi}\left[m_0-(m_4+2m_6+3m_8+\cdots)\right]. \qquad (4.1.33)$$

但是当 $r\leqslant\rho_m$ 或 $r\geqslant\rho_M$ 时应有

$$m_i=0,\ i\geqslant4.$$

故此时 (4.1.33) 式给出 (4.1.26) 式．余下的推理同证明一．

值得注意的是(4.1.33)式实际上提供了更多的信息．若已知当 $r\leqslant r_m$ 或 $r\geqslant r_M$ 时有

$$m_0-(m_4+2m_6+3m_8+\cdots)\geqslant0, \qquad (4.1.34)$$

则 (4.1.21) 式中的 ρ_m，ρ_M 分别换成 r_m，r_M 以后，不等式仍然成立．

§4.2 一个区域能够包含另一个区域的条件

关于一个区域包含另一个区域的问题，有人们所熟知的 Hadwiger 条件．本节中我们给出关于一个区域包含另一个区域的另外一种形式的充分条件． 这一条件与 Hadwiger 条件等价，但与后者相比有明显的优越性：不仅形式上更加简洁、易于检验，而且这种形式的条件使人们一目了然地看出二区域的等周亏格所起的作用，从而更深刻地揭示了问题的本质．

4.2.1 一个区域能够包含另一个区域的充分条件

定理(任德麟[1]) 设 K_0, K_1 都是由简单闭曲线围成的区域，周长分别为 L_0 和 L_1，面积分别为 F_0 和 F_1. 又，K_i 的等周亏格 $L_i^2-4\pi F_i$ 记为 $\Delta_i(i=0, 1)$. 若条件

$$(L_0-L_1)^2>\Delta_0+\Delta_1 \tag{4.2.1}$$

成立，则必有 $K_0\subset K_1$ 或 $K_1\subset K_0$. 置

$$L_0-L_1>(\Delta_0+\Delta_1)^{1/2}, \tag{4.2.2}$$

$$L_1-L_0>(\Delta_0+\Delta_1)^{1/2}. \tag{4.2.3}$$

则条件(4.2.2)是 $K_1\subset K_0$ 的充分条件，条件(4.2.3)是 $K_0\subset K_1$ 的充分条件.

证明 假设 ∂K_0、∂K_1 是逐段光滑的. 一般情形可通过用折线逼近 ∂K_0, ∂K_1 的手续补足，这一步放在证明的末尾. 由 Blaschke 基本运动公式，有

$$m_0+\int_{\partial K_1\cap\partial K_0\neq\emptyset}\nu dK_1=2\pi(F_0+F_1)+L_0L_1, \tag{4.2.4}$$

其中 m_0 表示测度 $m\{K_1: K_1\subset K_0\}$ 或 $m\{K_0: K_0\subset K_1\}$; $\nu=c(K_1\cap K_0)/2\pi$, 即交集 $K_1\cap K_0$ 的 Euler 示性数，亦即交集 $K_1\cap K_0$ 的块数. 又，由 Poincaré 公式，有

$$\int_{\partial K_1\cap\partial K_0\neq\emptyset}ndK_1=4L_0L_1, \tag{4.2.5}$$

其中 n 表示 ∂K_1 与 ∂K_0 的交点数. 注意，$K_1\cap K_0$ 的每一块(区域)的边界均由属于 ∂K_0 及属于 ∂K_1 的弧段所组成，因此块数 ν 与交点数 n 之间恒有关系 $\nu\leqslant n/2$. 于是由(4.2.4)和(4.2.5)二式可得

$$m_0\geqslant 2\pi(F_0+F_1)-L_0L_1. \tag{4.2.6}$$

显然，当

$$2\pi(F_0+F_1)-L_0L_1>0 \tag{4.2.7}$$

时，则有 $m_0>0$. 而 $m_0>0$ 蕴含 $K_1\subset K_0$ 或 $K_0\subset K_1$. 这就是说，条件(4.2.7)是致 K_1 可置于 K_0 的内部或 K_0 可置于 K_1 的内部的充分条件. 但条件(4.2.7)可等价地变形为如下的不等式:

$$(L_0-L_1)^2>L_0^2-4\pi F_0+L_1^2-4\pi F_1, \qquad (4.2.8)$$

此即不等式 (4.2.1).

现在我们来证明不等式 (4.2.2) 是致 $K_1\subset K_0$ 的充分条件. 首先我们注意, 由经典的等周不等式

$$\Delta_i=L_i^2-4\pi F_i\geqslant 0,$$

知(4.2.2)或 (4.2.3) 之右方在实数域内有意义. 不等式 (4.2.2) 等价于如下的不等式组:

$$L_0>L_1, \qquad (4.2.9)$$

$$(L_0-L_1)^2>\Delta_0+\Delta_1. \qquad (4.2.10)$$

不等式 (4.2.10) (亦即不等式 (4.2.7)) 可变形为

$$2\pi(F_0-F_1)>L_0L_1-4\pi F_1. \qquad (4.2.11)$$

在不等式 (4.2.11) 中计入 (4.2.9) 式及等周不等式

$$L_1^2-4\pi F_1\geqslant 0, \qquad (4.2.12)$$

则立即推知 $F_0>F_1$. 因为 (4.2.10) 式的成立已经蕴含 $K_1\subset K_0$ 或 $K_0\subset K_1$, 今复有条件 $F_0>F_1$, 可见必有 $K_1\subset K_0$. 同理可证, (4.2.3) 式是致 $K_0\subset K_1$ 的充分条件.

现在去掉 ∂K_0, ∂K_1 为逐段光滑的假定, 仅仅假设它们是可求长的, 这时结论仍然成立. 推理要点如下: 各取一串折线 $\partial K_0^{(m)}$, $\partial K_1^{(m)}$ 逼近 ∂K_0, ∂K_1. 由 $\partial K_i^{(m)}$ 围成的区域 $K_i^{(m)}$ 的面积、周长分别记为 $F_i^{(m)}$、$L_i^{(m)}$. 对于每个 m, 由已证之结论, 当

$$2\pi(F_0^{(m)}+F_1^{(m)})-L_0^{(m)}L_1^{(m)}>0$$

时则必有 $K_1^{(m)}\subset K_0^{(m)}$ 或 $K_0^{(m)}\subset K_1^{(m)}$. 考虑到这里讲的区域的包含关系是指一区域在另一区域的内部, 以及不等式(4.2.7)是严格不等式, 极限过程将提供所求证之结论.

4.2.2 与 Hadwiger 条件的比较

定理(Hadwiger 条件[2],[3]) 关于 K_0, K_1 的假定同上一段定理. 不等式

$$L_0L_1-4\pi F_1>(L_0^2L_1^2-16\pi^2F_0F_1)^{1/2} \qquad (4.2.13)$$

是 $K_1\subset K_0$ 的充分条件. 不等式

$$4\pi F_0 - L_0 L_1 > (L_0^2 L_1^2 - 16\pi^2 F_0 F_1)^{1/2} \tag{4.2.14}$$

是 $K_0 \subset K_1$ 的充分条件.

现在我们来考察 Hadwiger 条件 (4.2.13)、(4.2.14) 与前段定理中的条件 (4.2.2)、(4.2.3) 之间的关系,我们有下列结论:

定理 条件(4.2.2)与条件(4.2.13)等价; 条件(4.2.3)与条件 (4.2.14) 等价.

证明 前面已经提到, 不等式 (4.2.2) 等价于由 (4.2.9) 和 (4.2.10) 组成的不等式组,或者说,等价于由 (4.2.9)和 (4.2.11) 组成的不等式组. 而 Hadwiger 条件(4.2.13)则等价于由不等式

$$L_0 L_1 - 4\pi F_1 > 0 \tag{4.2.15}$$

和不等式(4.2.11)组成的不等式组. 因此,(4.2.2)与(4.2.13)的等价性归结为这两个不等式组的等价性.

假定 (4.2.9) 和 (4.2.11) 成立,则因 (4.2.9) 与等周不等式 (4.2.12) 结合起来可推出 (4.2.15) 式, 从而不等式 (4.2.11) 和 (4.2.15)组成的不等式组成立. 反之, 若(4.2.11)和(4.2.15)成立,则有 $F_0 > F_1$. 既然 $F_0 > F_1$, 那么此时不可能出现 $L_0 < L_1$, 因为由前段定理知若 $L_1 > L_0$ 必致 $F_1 > F_0$(注意,不等式(4.2.11)的成立已经排除了 $L_0 = L_1$ 的可能性). 这就是说, 由不等式组 (4.2.11) 和(4.2.15)可以推出不等式组(4.2.9)和 (4.2.11). 至此, 已建立了不等式 (4.2.2) 与 Hadwiger 条件 (4.2.13) 的等价性. 同理可证不等式 (4.2.3) 与 Hadwiger 条件 (4.2.14) 是等价的. 自然,在建立这种等价性的过程中,用到了当然成立的经典等周不等式.

既然条件(4.2.2)和(4.2.3)分别与 Hadwiger 条件 (4.2.13) 和(4.2.14)等价,那么提出条件(4.2.2)和(4.2.3)的意义何在呢? 至少从以下两方面看, 我们有理由建议用条件(4.2.2)和(4.2.3) 取代 Hadwiger 条件(4.2.13)和(4.2.14).

其一, 在检验条件是否满足方面, 条件(4.2.2)、(4.2.3)比条件(4.2.13)、(4.2.14)简易得多. 实际上,条件(4.2.2)和(4.2.3) 明白地告诉人们: 在验知条件 (4.2.7) 满足后, 再看一下 L_0 与 L_1

孰大孰小则立即可作出判断.

其二，条件(4.2.2)和(4.2.3)明显地展示了二区域的等周亏格 Δ_i 在这一充分条件中的作用. 在这种形式的充分条件中，量 $(\Delta_0+\Delta_1)^{1/2}$ 起关键作用：当周长之差大于这个量时，条件(4.2.2)和(4.2.3)可用以判断谁包含谁. 形象地说，量 $(\Delta_0+\Delta_1)^{1/2}$ 大，“不利于”区域的彼此包含；量 $(\Delta_0+\Delta_1)^{1/2}$ 小，“有利于”区域的彼此包含. 联系到等周亏格的几何意义(Δ_i 可视为 K_i 与圆形偏离程度的一种尺度)，不等式(4.2.2)和(4.2.3)的直观意义就比较明显了. 观察一种极端的情况是有趣的：当 K_0, K_1 都是圆时，$\Delta_0=\Delta_1=0$，这时这两个不等式告诉人们的乃是生动而初浅的几何事实——小圆可以放入大圆中.

4.2.3 若干推论

由 4.2.1 段的定理可直接导致若干推论.

推论 1 K_i 的凸壳记为 K_i^*，K_i^* 的周长、面积及等周亏格分别记为 L_i^*，F_i^* 及 Δ_i^*，$i=1, 2$. 则

$$L_0-L_1^*>(\Delta_0+\Delta_1^*)^{1/2}, \qquad (4.2.16)$$

$$L_1-L_0^*>(\Delta_0^*+\Delta_1)^{1/2} \qquad (4.2.17)$$

分别为能有 $K_1\subset K_0$ 和 $K_0\subset K_1$ 的充分条件.

结论是显然的. 值得注意的是，此二条件较之对应的条件(4.2.2)和(4.2.3)为强. 例如，若(4.2.2)成立，则因

$$L_1^*\leqslant L_1 \text{ 及 } \Delta_1^*\leqslant\Delta_1,$$

必有(4.2.16)式；但反过来，若(4.2.16)式成立，(4.2.2)式不一定成立.

推论 2 若(4.2.2)成立，将 K_1 换为周长保持为 L_1 的另一区域 $\widetilde{K}_1$，只要其等周亏格 $\widetilde{\Delta}_1\leqslant\Delta_1$，则 $\widetilde{K}_1$ 可含于 K_0 内. 若(4.2.3)式成立，将 K_1 换为周长保持为 L_1 的另一区域 $\widetilde{K}_1$，只要其等周亏格 $\widetilde{\Delta}_1\leqslant\Delta_1$，则 $\widetilde{K}_1$ 可包含 K_0.

§4.3 凸域内定长线段的运动测度(任德麟[4])

4.3.1 问题的提出

考虑如下的几何概率问题：设有二凸域 K_0 和 K_1，K_1 位于 K_0 内部．将长度为 l 的线段 N 随机地投掷于平面上，若已知 N 落入区域 K_0 内部，试求 N 与 K_1 相遇的概率．这就是所谓的探针搜索问题．若能求出含于 K_0 内的定长线段 N 的运动测度

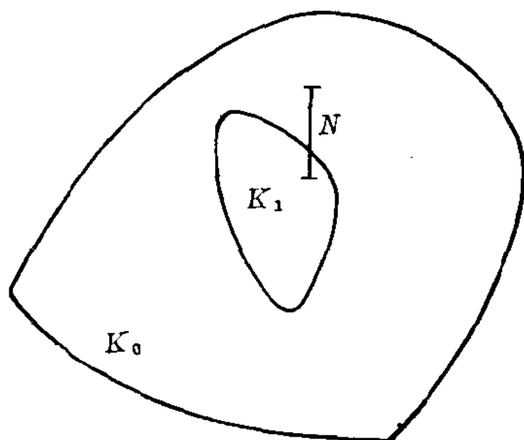


图 4-1

$$m_1=m\{N;\ N\subset K_0\},$$

以及与 K_1 相遇的 N 的运动测度

$$m_2=m\{N;\ N\cap K_1\neq\emptyset\},$$

则所求的几何概率为

$$p=m_2/m_1.$$

其中 m_2 的求法是极其简单的，只要视 N 为周长为 $2l$ 的退化区域，直接运用 Blaschke 公式即可．至于测度 m_1（即含于凸域内的定长线段的运动测度）的求法，则较为困难．本节的目的就在于建立这一测度的普遍公式．值得注意的是，解决上述搜索问题并不是我们讨论这种测度的唯一目标．这种测度无论在理论上或应用上均有一定意义．下一节我们将利用它解决一系列几何概率问题．

4.3.2 凸域内定长线段的运动测度公式

定理 设 D 为平面上有界闭凸域，周长为 L，面积为 F．N 为长度等于常数 l 的线段．含于 D 内的 N 的运动测度记为 $m(l)$．则有

$$m(l)=\pi F-lL+\int_{\substack{G\cap D\neq\emptyset\\(\sigma<l)}}(l-\sigma)dG, \qquad (4.3.1)$$

其中 σ 表示 D 被 G 截出的弦长．

证明 考虑长度为 l 的有向线段 N^*，其起点记为 O_1，含于 D 内的 N^* 的运动测度记为 $m^*(l)$. 此外，引入如下几个记号：

$$m_i^*(l)=m\{N^*: N^*\cap\partial D\neq\emptyset,\ O_1\in\mathrm{int}D\},$$

$$m_e^*(l)=m\{N^*: N^*\cap\partial D\neq\emptyset,\ O_1\overline{\in} D\},$$

$$m_e^{(1)}(l)=m\{N^*: O_1\overline{\in} D \text{ 且 } N^* \text{ 与 } \partial D \text{ 恰有一个交点}\},$$

$$m_e^{(2)}(l)=m\{N^*: O_1\overline{\in} D \text{ 且 } N^* \text{ 与 } \partial D \text{ 恰有两个交点}\}.$$

显然有

$$m_i^*(l)=m_e^{(1)}(l), \tag{4.3.2}$$

$$m_e^*(l)=m_e^{(1)}(l)+m_e^{(2)}(l). \tag{4.3.3}$$

于是有

$$\begin{aligned} m^*(l)&=\int_{\substack{N^*\cap D\neq\emptyset\\(O_1\in\mathrm{int}D)}} dK-m_i^*(l)=2\pi F-m_e^{(1)}(l)\\ &=2\pi F-m_e^*(l)+m_e^{(2)}(l). \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

现在我们把注意力集中于测度 $m_e^*(l)$ 和 $m_e^{(2)}(l)$. 关于前者，我们有

$$\begin{aligned} m_e^*(l)&=\int_{N^*\cap D\neq\emptyset} dK-\int_{\substack{N^*\cap D\neq\emptyset\\(O_1\in\mathrm{int}D)}} dK\\ &=(2\pi F+2lL)-2\pi F=2lL. \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

公式 (4.3.5) 可以视为一独立的结果. 在积分几何发展的早期，Santaló 曾用精湛的技巧导出这一公式. 为了求出测度 $m_e^{(2)}(l)$，可设想 N^* 附着于一有向直线 G^* 上，N^* 与 ∂D 交于二点相应于 G^* 在 D 上截出的弦长 $\sigma\leqslant l$. 利用密度形式 (3.2.15) 式

$$dK=dG^*\wedge dt,$$

我们有

$$m_e^{(2)}(l)=\int_{\substack{G^*\cap D\neq\emptyset\\(\sigma\leqslant l)}}(l-\sigma)dG^*=2\int_{\substack{G\cap D\neq\emptyset\\(\sigma\leqslant l)}}(l-\sigma)dG. \tag{4.3.6}$$

注意，一条无向直线 G 对应于两条有向直线 G^*，这是 (4.3.6) 式右方因子“2”的来源. 将(4.3.5)和(4.3.6)二式代入(4.3.4)式，即得

$$m^*(l)=2\pi F-2lL+2\int_{\substack{G\cap D\neq\emptyset\\(\sigma\leqslant l)}}(l-\sigma)dG. \tag{4.3.7}$$

由于无向线段 N 的一个位置对应于有向线段 N^* 的两个位置，故

从 (4.3.7) 式可得 (4.3.1) 式.

推论 1 当 $l=0$ 时, $m(0)=\pi F$.

注意, $m(0)$ 与含于凸域 D 内的点 P 的运动测度

$$m\{P: P\in D\}=2\pi F$$

有区别. $m(0)$ 表示 D 内"零长度线段"的运动测度——(无向)线段绕其中点旋转 π 后被看作是回到了原来的位置.

推论 2 设 d 为凸域 D 之直径. 对于一切 $l\geqslant d$, 显然有 $m(l)=0$ (此时 D 内已容不下 N), 即

$$\pi F-lL+\int_{G\cap D\neq\varnothing}(l-\sigma)dG=0,\ \forall l\geqslant d.$$

上式蕴含如下二熟知的公式:

$$\int_{G\cap D\neq\varnothing}dG=L,\quad \int_{G\cap D\neq\varnothing}\sigma dG=\pi F.$$

由此亦可见 (4.3.1) 式是一个内涵很丰富的公式.

4.3.3 广义支持函数和限弦函数

公式 (4.3.1) 虽然表达出运动测度 $m(l)$, 但公式中所含积分项不便于实际计算, 因此我们希望将这一公式转化为另外的形式. 为此我们首先引入广义支持函数和限弦函数概念.

定义 以 σ 表示凸域 D 被直线 G 截出之弦长. 当 G 仅与 ∂D 相交包括 $G\cap\partial D$ 是线段情形, 约定 $\sigma=0$. G 的表示取广义法式. 对任意给定之 σ 及 $\phi(0\leqslant\phi<2\pi)$, 置

$$p(\sigma,\ \phi)=\sup_{G}\{p: m[G\cap(\operatorname{int}D)]=\sigma\},\qquad(4.3.8)$$

我们称二元函数 $p(\sigma,\ \phi)$ 为凸域 D 的广义支持函数.

显然, 取 $\sigma=0$, 则 $p(0,\ \phi)$ 便是通常的支持函数. 从而有

$$\int_0^{2\pi}p(0,\ \phi)d\phi=L.\qquad(4.3.9)$$

定义 以 $\sigma_M(\phi)$ 表示垂直于 ϕ 方向的直线 G 与凸域 D 截出的弦长最大值, 即

$$\sigma_M(\phi)=\sup_{G}\{\sigma: \sigma=m[G\cap(\operatorname{int}D)]\}.$$

对任意给定的 $l(\geqslant 0)$ 及 $\phi(0\leqslant\phi<2\pi)$，置

$$r(l,\ \phi)=\min\{l,\ \sigma_M(\phi)\}, \qquad (4.3.10)$$

我们称二元函数 $r(l,\ \phi)$ 为凸域 D 的限弦函数.

显然，对任何 $l\geqslant 0$，广义支持函数 $p(\sigma,\ \phi)$ 在区域

$$(F_l):\ 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi,\ \ 0\leqslant\sigma\leqslant r(l,\ \phi)$$

上有定义.

4.3.4 用广义支持函数表达 $m(l)$ 的公式

现在我们来介绍用广义支持函数和限弦函数表达运动测度 $m(l)$ 的公式.

定理 设 $p(\sigma,\ \phi)$ 和 $r(l,\ \phi)$ 分别为凸域 D 的广义支持函数和限弦函数. $m(l)$ 之定义同前. 则有

$$m(l)=\pi F-\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{r(l,\phi)}p(\sigma,\ \phi)\,d\sigma, \qquad (4.3.11)$$

其中 F 为 D 之面积.

附注 在公式(4.3.11)中，内层积分的下限应为“0^+”. 今为简便计，一律记为“0”.

证明 公式(4.3.11)可由公式(4.3.1)转化而来. 将(4.3.1)式右方积分项简记为 J，

$$J=\int_{\substack{G\cap D\neq\varnothing\\(\sigma\leqslant l)}}(l-\sigma)\,dG. \qquad (4.3.12)$$

以下专事处理积分 J.

为了下面证明的需要，我们将 $[0,\ 2\pi]$ 划分为三种类型的一些子区间.

第 1 型 $\quad I_k^{(1)}=[\phi_k^{(1)},\ \phi_{k+1}^{(1)}]$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n_1$.

条件：当 $\phi\in I_k^{(1)}$ 时，$l<\min\limits_{\phi\in I_k^{(1)}}\sigma_M(\phi)$；

$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n_1. \qquad (4.3.13)$$

第 2 型 $\quad I_k^{(2)}=[\phi_k^{(2)},\ \phi_{k+1}^{(2)}]$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n_2$.

条件：1) $\phi_{n_2+k}^{(2)}=\phi_k^{(2)}+\pi$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n_2+1$； $\qquad$ (4.3.14)

2) 当 $\phi\in I_k^{(2)}$ 时，$l\geqslant\min\limits_{\phi\in I_k^{(2)}}\sigma_M(\phi)$； $\qquad$ (4.3.15)

3） 当 $\phi\in I_k^{(2)}$ 时，

$$p(\sigma_M(\phi),\ \phi)=-p(\sigma_M(\phi+\pi),\ \phi+\pi). \qquad (4.3.16)$$

第 3 型 $I_k^{(3)}=[\phi_k^{(3)},\ \phi_{k+1}^{(3)}]$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n_3$.

条件：1） $\phi_{n_3+k}^{(3)}=\phi_k^{(3)}+\pi$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n_3+1$; (4.3.17)

2） 当 $\phi\in I_k^{(3)}$ 时，$l\geqslant\min\limits_{\phi\in I_k^{(3)}}\sigma_M(\phi)$; (4.3.18)

3） 当 $\phi\in I_k^{(3)}$ 时，$p(\sigma_M(\phi),\ \phi)>$

$$-p(\sigma_M(\phi+\pi),\ \phi+\pi). \qquad (4.3.19)$$

相应于区间的如此划分，对积分 (4.3.12) 处理如下：

关于第 1 型子区间上的积分，我们有

$$J_k^{(1)}=\int_{\substack{G\cap D\neq\emptyset\\(\sigma\leqslant l;\,\phi\in I_k^{(1)})}}(l-\sigma)\,dG=l\int_{\substack{G\cap D\neq\emptyset\\(\sigma\leqslant l;\,\phi\in I_k^{(1)})}}dp\wedge d\phi$$

$$-\int_{\substack{G\cap D\neq\emptyset\\(\sigma\leqslant l;\,\phi\in I_k^{(1)})}}\sigma\,dp\wedge d\phi=\int_{\phi_k^{(1)}}^{\phi_{k+1}^{(1)}}[p(0,\ \phi)-p(l,\ \phi)]d\phi$$

$$-\int_{\phi_k^{(1)}}^{\phi_{k+1}^{(1)}}\left\{[\sigma p(\sigma,\ \phi)]\Big|_l^0-\int_l^0 p(\sigma,\ \phi)\,d\sigma\right\}d\phi$$

$$=l\int_{\phi_k^{(1)}}^{\phi_{k+1}^{(1)}}p(0,\ \phi)\,d\phi-\int_{\phi_k^{(1)}}^{\phi_{k+1}^{(1)}}d\phi\int_0^l p(\sigma,\ \phi)\,d\sigma, \qquad (4.3.20)$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n_1.$$

在计算第2型和第3型子区间上的积分时，注意条件(4.3.15)和(4.3.18)的作用，以及显然成立的关系

$$\sigma_M(\phi+\pi)=\sigma_M(\phi). \qquad (4.3.21)$$

对第 2 型子区间，我们有

$$J_k^{(2)}+J_{n_2+k}^{(2)}=\int_{\substack{G\cap D\neq\emptyset\\(\sigma\leqslant\sigma_M(\phi);\,\phi\in I_k^{(2)})}}(l-\sigma)\,dG$$

$$+\int_{\substack{G\cap D\neq\emptyset\\(\sigma\leqslant\sigma_M(\phi);\,\phi\in I_{n_2+k}^{(2)})}}(l-\sigma)\,dG=l\int_{\substack{G\cap D\neq\emptyset\\(\sigma\leqslant\sigma_M(\phi);\ \phi\in I_k^{(2)})}}dp\wedge d\phi$$

$$-\int_{\substack{G\cap D\neq\emptyset\\(\sigma\leqslant\sigma_M(\phi);\,\phi\in I_k^{(2)})}}\sigma\,dp\wedge d\phi+l\int_{\substack{G\cap D\neq\emptyset\\(\sigma\leqslant\sigma_M(\phi);\,\phi\in I_{n_2+k}^{(2)})}}dp\wedge d\phi$$

$$
-\int_{\substack{G\cap D\neq\emptyset \\ (\sigma\leqslant\sigma_M(\phi),\ \phi\in I^{(2)}_{n_2+k})}} \sigma dp\wedge d\phi = l\int_{\phi_k^{(2)}}^{\phi_{k+1}^{(2)}} [p(0,\ \phi)-p(\sigma_M(\phi),\ \phi)]d\phi
$$

$$
-\int_{\phi_k^{(2)}}^{\phi_{k+1}^{(2)}} \left\{ [\sigma p(\sigma,\ \phi)]\ \Big|_{\sigma_M(\phi)}^{0} - \int_{\sigma_M(\phi)}^{0} p(\sigma,\ \phi)d\sigma \right\} d\phi
$$

$$
+l\int_{\phi_k^{(2)}+\pi}^{\phi_{k+1}} [p(0,\ \phi)-p(\sigma_M(\phi),\ \phi)]d\phi
$$

$$
-\int_{\phi_k^{(2)}+\pi}^{\phi_{k+1}^{(2)}+\pi} \left\{ [\sigma p\ (\sigma,\ \phi)]\ \Big|_{\sigma_M(\phi)}^{0} - \int_{\sigma_M(\phi)}^{0} p(\sigma,\ \phi)d\sigma \right\} d\phi
$$

$$
= l\int_{\phi_k^{(2)}}^{\phi_{k+1}^{(2)}} p(0,\ \phi)d\phi - l\int_{\phi_k^{(2)}}^{\phi_{k+1}^{(2)}} p(\sigma_M(\phi),\ \phi)d\phi
$$

$$
+\int_{\phi_k^{(2)}}^{\phi_{k+1}^{(2)}} \sigma_M(\phi)p(\sigma_M(\phi),\ \phi)d\phi
$$

$$
-\int_{\phi_k^{(2)}}^{\phi_{k+1}^{(2)}} d\phi \int_0^{\sigma_M(\phi)} p(\sigma,\ \phi)d\sigma + l\int_{\phi_k^{(2)}+\pi}^{\phi_{k+1}^{(2)}+\pi} p(0,\ \phi)d\phi
$$

$$
-l\int_{\phi_k^{(2)}+\pi}^{\phi_{k+1}^{(2)}+\pi} p(\sigma_M(\phi),\ \phi)d\phi
$$

$$
+\int_{\phi_k^{(2)}+\pi}^{\phi_{k+1}^{(2)}+\pi} \sigma_M(\phi)p(\sigma_M(\phi),\ \phi)d\phi
$$

$$
-\int_{\phi_k^{(2)}+\pi}^{\phi_{k+1}^{(2)}+\pi} d\phi \int_0^{\sigma_M(\phi)} p(\sigma,\ \phi)d\sigma
$$

$$
= l\int_{\phi_k^{(2)}}^{\phi_{k+1}^{(2)}} p(0,\ \phi)d\phi + l\int_{\phi_{n_2+k}^{(2)}}^{\phi_{n_2+k+1}^{(2)}} p(0,\ \phi)d\phi
$$

$$
-\int_{\phi_k^{(2)}}^{\phi_{k+1}^{(2)}} d\phi \int_0^{\sigma_M(\phi)} p(\sigma,\ \phi)d\sigma
$$

$$
-\int_{\phi_{n_2+k}^{(2)}}^{\phi_{n_2+k+1}^{(2)}} d\phi \int_0^{\sigma_M(\phi)} p(\sigma,\ \phi)\,d\sigma - l\int_{\phi_k^{(2)}}^{\phi_{k+1}^{(2)}} p(\sigma_M(\phi),\ \phi)d\phi
$$

$$
-l\int_{\phi_k^{(2)}}^{\phi_{k+1}^{(2)}} p(\sigma_M(u+\pi),\ u+\pi)du
$$

$$
+\int_{\phi_k^{(2)}}^{\phi_{k+1}^{(2)}} \sigma_M(\phi)p(\sigma_M(\phi),\ \phi)d\phi
$$

$$+\int_{\phi_k^{(2)}}^{\phi_{k+1}^{(2)}}\sigma_M(u+\pi)p(\sigma_M(u+\pi),\ u+\pi)du.$$

再计入 (4.3.16) 和 (4.3.21) 二式，得到

$$J_k^{(2)}+J_{k+1}^{(2)}=l\left\{\int_{\phi_k^{(2)}}^{\phi_{k+1}^{(2)}}p(0,\ \phi)\,d\phi+\int_{\phi_{n_2+k}^{(2)}}^{\phi_{n_2+k+1}^{(2)}}p(0,\ \phi)d\phi\right\}$$

$$-\left\{\int_{\phi_k^{(2)}}^{\phi_{k+1}^{(2)}}d\phi\int_0^{\sigma_M(\phi)}p(\sigma,\ \phi)d\sigma\right.$$

$$\left.+\int_{\phi_{n_2+k}^{(2)}}^{\phi_{n_2+k+1}^{(2)}}d\phi\int_0^{\sigma_M(\phi)}p(\sigma,\ \phi)d\sigma\right\},\qquad(4.3.22)$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n_2.$$

对第 3 型子区间，有

$$J_k^{(3)}+J_{n_3+k}^{(3)}=\int_{\substack{G\cap D\neq\emptyset\\(\sigma=\sigma_M(\phi);\phi\in I_k^{(3)})}}(l-\sigma)dG$$

$$+\int_{\substack{G\cap D\neq\emptyset\\(\sigma<\sigma_M(\phi);\phi\in I_k^{(3)})}}(l-\sigma)dG+\int_{\substack{G\cap D\neq\emptyset\\(\sigma>\sigma_M(\phi);\phi\in I_{n_3+k}^{(3)})}}(l-\sigma)dG$$

$$=\int_{\phi_k^{(3)}}^{\phi_{k+1}^{(3)}}[l-\sigma_M(\phi)]\,[p(\sigma_M(\phi),\phi)+p(\sigma_M(\phi+\pi),\phi+\pi)]d\phi$$

$$+l\int_{\phi_k^{(3)}}^{\phi_{k+1}^{(3)}}[p(0,\ \phi)-p(\sigma_M(\phi),\ \phi)]d\phi$$

$$-\int_{\phi_k^{(3)}}^{\phi_{k+1}^{(3)}}\left\{\Big[\sigma p(\sigma,\ \phi)\Big]\Big|_{\sigma_M(\phi)}^{0}-\int_{\sigma_M(\phi)}^{0}p(\sigma,\ \phi)\right\}d\phi$$

$$+l\int_{\phi_k^{(3)}+\pi}^{\phi_{k+1}^{(3)}+\pi}[p(0,\ \phi)-p(\sigma_M(\phi),\ \phi)]d\phi$$

$$-\int_{\phi_k^{(3)}+\pi}^{\phi_{k+1}^{(3)}+\pi}\left\{\Big[\sigma p(\sigma,\ \phi)\Big]\Big|_{\sigma_M(\phi)}^{0}-\int_{\sigma_M(\phi)}^{0}p(\sigma,\ \phi)\right\}d\phi$$

$$=l\int_{\phi_k^{(3)}}^{\phi_{k+1}^{(3)}}p(0,\ \phi)d\phi+l\int_{\phi_{n_3+k}^{(3)}}^{\phi_{n_3+k+1}^{(3)}}p(0,\ \phi)d\phi$$

$$-\int_{\phi_k^{(3)}}^{\phi_{k+1}^{(3)}}d\phi\int_0^{\sigma_M(\phi)}p(\sigma,\ \phi)d\sigma$$

$$-\int_{\phi_{n_3+k}^{(3)}}^{\phi_{n_3+k+1}^{(3)}} d\phi \int_0^{\sigma_M(\phi)} p(\sigma, \phi) d\sigma$$

$$+l\int_{\phi_k^{(3)}}^{\phi_{k+1}^{(3)}} p(\sigma_M(\phi+\pi), \phi+\pi) d\phi$$

$$-\int_{\phi_k^{(3)}}^{\phi_{k+1}^{(3)}} \sigma_M(\phi) p(\sigma_M(\phi+\pi), \phi+\pi) d\phi$$

$$-l\int_{\phi_k^{(3)}+\pi}^{\phi_{k+1}^{(3)}+\pi} p(\sigma_M(\phi), \phi) d\phi$$

$$+\int_{\phi_k^{(3)}+\pi}^{\phi_{k+1}^{(3)}+\pi} \sigma_M(\phi) p(\sigma_M(\phi), \phi) d\phi.$$

在最后两项积分中施行变量替换 $\phi=u+\pi$, 并注意到关系 (4.3.21). 则可看出上式右方最后四项正好相消, 从而得到

$$J_k^{(3)}+J_{k+1}^{(3)}=l\left\{\int_{\phi_k^{(3)}}^{\phi_{k+1}^{(3)}} p(0, \phi) d\phi+\int_{\phi_{n_3+k}^{(3)}}^{\phi_{n_3+k+1}^{(3)}} p(0, \phi) d\phi\right\}$$

$$-\left\{\int_{\phi_k^{(3)}}^{\phi_{k+1}^{(3)}} d\phi \int_0^{\sigma_M(\phi)} p(\sigma, \phi) d\sigma\right.$$

$$\left.+\int_{\phi_{n_3+k}^{(3)}}^{\phi_{n_3+k+1}^{(3)}} d\phi \int_0^{\sigma_M(\phi)} p(\sigma, \phi) d\sigma\right\}, \tag{4.3.23}$$

$$k=1, 2, \cdots, n_3.$$

将 (4.3.20), (4.3.22) 及 (4.3.23) 三式对相应指标求和, 然后相加, 最后得到

$$J=l\int_0^{2\pi} p(0, \phi) d\phi-\left\{\sum_{k=1}^{n_1}\int_{\phi_k^{(1)}}^{\phi_{k+1}^{(1)}} d\phi\int_0^{l} p(\sigma, \phi) d\sigma\right.$$

$$\left.+\sum_{i=2}^{3}\sum_{k=1}^{2n_i}\int_{\phi_k^{(i)}}^{\phi_{k+1}^{(i)}} d\phi\int_0^{\sigma_M(\phi)} p(\sigma, \phi) d\sigma\right\}. \tag{4.3.24}$$

根据限弦函数的定义(见 (4.3.10) 式)及 (4.3.9) 式, 立即看出 (4.3.24)式可改写为

$$J=lL-\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{r(l,\phi)} p(\sigma, \phi) d\sigma. \tag{4.3.25}$$

将此式代入公式 (4.3.1) 即得所欲证之 (4.3.11) 式.

公式(4.3.11)对平面上任意凸域皆成立，从原则上说，它提供了计算任意凸域的 $m(l)$ 的一般程序：先找出凸域的广义支持函数和限弦函数，然后按公式(4.3.11)作初等运算即可。

此外，若引入所谓广义宽度函数

$$w(\sigma, \phi)=p(\sigma, \phi)+p(\sigma, \phi+\pi), \tag{4.3.26}$$

则公式(4.3.11)可转化为下述形式：

$$m(l)=\pi F-\int_0^\pi d\phi \int_0^{r(l, \phi)} w(\sigma, \phi) d\sigma. \tag{4.3.27}$$

4.3.5 矩形域的 $m(l)$

作为举例，今应用(4.3.11)式计算矩形域的 $m(l)$.

于平面上取好直角坐标系 xoy. 设矩形域为

$$(R): \qquad -\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}, \quad -\frac{b}{2}\leqslant y\leqslant\frac{b}{2}. \tag{4.3.28}$$

不失一般性，可设 $b\leqslant a$，矩形的直径 $(a^2+b^2)^{1/2}$ 简记为 d. 由对称性，仅需考虑由 0 到 $\pi/2$ 的积分. 对于 $0\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}$，矩形域 R 的限弦函数 $r(l, \phi)$ 为

$$r(l, \varphi)=\begin{cases} l, & \text{当 } 0\leqslant l\leqslant b \text{ 及 } 0\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ b/\cos\phi, & \text{当 } b\leqslant l<a \text{ 及 } 0\leqslant\phi\leqslant\arccos\frac{b}{l}, \\ l, & \text{当 } b\leqslant l<a \text{ 及 } \arccos\frac{b}{l}\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ b/\cos\phi, & \text{当 } a\leqslant l\leqslant d \text{ 及 } 0\leqslant\phi<\arccos\frac{b}{l}, \\ l, & \text{当 } a\leqslant l\leqslant d \text{ 及 } \arccos\frac{b}{l}\leqslant\phi<\arcsin\frac{a}{l}, \\ a/\sin\phi, & \text{当 } a\leqslant l\leqslant d \text{ 及 } \arcsin\frac{a}{l}\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{4.3.29}$$

R 的广义支持函数为

$$p(\sigma, \phi)=\frac{1}{2}(a\cos\phi+b\sin\phi-\sigma\sin 2\phi), \tag{4.3.30}$$

$$0\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\sigma\leqslant r(l,\ \phi)$$

利用公式(4.3.11)可得

$$m(l)=\begin{cases}\pi ab-2(a+b)l+l^2, & \text{当 } 0\leqslant l\leqslant b, \quad (4.3.31)\\ \pi ab-2ab\arccos\dfrac{b}{l}-2al \\ \qquad +2a(l^2-b^2)^{1/2}-b^2, & \text{当 } b\leqslant l\leqslant a, \quad (4.3.32)\\ 2a(l^2-b^2)^{1/2}+2b(l^2-a^2)^{1/2} \\ \qquad -a^2-b^2-l^2 \\ \qquad +2ab\arcsin\dfrac{a}{l} \\ \qquad -2ab\arccos\dfrac{b}{l}, & \text{当 } a\leqslant l\leqslant d. \quad (4.3.33)\end{cases}$$

其中(4.3.31)式，即 l 不超过矩形较短边之长的情形，前人用直接计算法曾经得到这一结果.

§4.4 运动测度 $m(l)$ 在几何概率问题中的应用

上一节我们导出的运动测度 $m(l)$ 的一般公式，除了能够解决上一节提到的搜索问题外，还有许多其他的应用. 本节主要介绍如何利用测度 $m(l)$ 对 Buffon 问题作一系列推广.

4.4.1 Buffon 问题的 Laplace 推广

设平面上有两组互相正交的平行线网，一组的间隔为 a，另一组的间隔为 b. 如此形成的网格称为矩形网格. 以 a 和 b 为边的矩形叫做此网格的基本区域. 设 $b\leqslant a$. 今有小针 N，其长度 l 不超过矩形较短边之长(即 $l\leqslant b$)，随机地投掷于平面上. 我们希望求出 N 与该矩形网格相遇的概率 p. 这一问题称为 Buffon 问题的 Laplace 推广.

现在我们来介绍这一问题的经典解法(见 Uspensky[5]). 以 $(x,\ y)$ 表示小针 N 的中点的坐标，$o\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$；φ 表示 N 与

ox 轴之间的角，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$. 从而，小针 N 的一切可能的位置，对应于边长为 a, b 及 π 的长方体中均匀分布的点 (x, y, φ). 此长方体的体积为 $V=\pi ab$. 含于长方形内的小针 N 的位置集之测度 V^* 可按下述步骤求出：V^* 亦可视为 (x, y, φ) 空间一立体的体积. 固定 φ, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, 此立体的截面面积为

$$\begin{aligned}F(\varphi)&=(a-l\cos\varphi)(b-l|\sin\varphi|)\\&=ab-bl\cos\varphi-al|\sin\varphi|+\frac{1}{2}l^2|\sin 2\varphi|.\end{aligned}\tag{4.4.1}$$

于是有

$$V^*=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(\varphi)d\varphi=\pi ab-2(a+b)l+l^2.\tag{4.4.2}$$

最后得到 N 与矩形网格相遇的概率 p:

$$p=1-\frac{V^*}{V}=1-\frac{\pi ab-2(a+b)l+l^2}{\pi ab}=\frac{2l(a+b)-l^2}{\pi ab}.\tag{4.4.3}$$

以上解法中最关键的一步是求体积 V^*. 其实这里的 V^* 正是前面讲的运动测度 $m(l)$. 在刚才的问题中，网格的基本区域是矩形，且限制针长不超过矩形的较短边，因而上述解法并不显得十分复杂. 倘若基本区域是另外的多边形，且针长不受限制(即允许针长取不超过基本区域直径的一切正值)，此时如果利用类似刚才求 V^* 的办法去解决相应的推广的 Buffon 问题，其繁复的程度将令人难以忍受. 而上一节所述的求运动测度 $m(l)$ 的普遍公式，为解决这一类问题提供了统一而有效的方法.

4.4.2 利用 $m(l)$ 讨论推广的 Buffon 问题

所谓区域格 (lattice of regions) 是指满足下列条件的一种全等区域序列 α_0, α_1, $\cdots$:

(i) 平面上任一点 P 属于且仅属于某一个区域 α_i;

(ii) 对于任意指定的 α_k, 存在运动 $u_k\in\mathfrak{M}$ 致 $u_k\alpha_k$ 重合于 α_0,

与此同时 u_k 使得序列中每个区域重合于序列中另外的区域.

诸 α_i 称为此区域格的基本区域. 这些基本区域的边界组成的图形称为此区域格的网格.

今考虑这样的区域格, 假定其基本区域全等于某凸域 K(有时我们称此区域格是以 K 作为基本区域所形成的) 对于这样的区域格的网格, 可讨论相应的 Buffon 问题: 将长度为 l 的小针 N 随机地投掷于平面上, 试求 N 与该网格相遇的概率 p.

设 K 的面积为 F. 又若含于 K 内的定长线段 N 的运动测度为 $m(l)$. 参照上一段的讨论, 不难看出

$$p=1-\frac{m(l)}{\pi F}. \tag{4.4.4}$$

仍以上一段讨论过的矩形网格为例, 此时 $F=ab$, 而 $m(l)$ 由 (4.3.31)、(4.3.32) 及 (4.3.33) 给出.

情形 1. 设 $0\leqslant l\leqslant b$.

利用 (4.3.31) 式, 有

$$p=\frac{2l(a+b)-l^2}{\pi ab}. \tag{4.4.5}$$

自然, 此式即前面的(4.4.3)式. 在(4.4.5)式中, 若令 $a\to\infty$ 则得到 N 与间隔为 b 的平行线网相遇的概率(仍以 p 记之):

$$p=\frac{2l}{\pi b}. \tag{4.4.6}$$

这是经典的 Buffon 问题的解.

情形 2. 设 $b\leqslant l\leqslant a$.

利用 (4.3.32) 式, 有

$$p=\frac{2ab\arccos\dfrac{b}{l}+2la-2a(l^2-b^2)^{1/2}+b^2}{\pi ab}. \tag{4.4.7}$$

值得一提的是, 我们在第二章中曾经提到过的长针 Buffon 问题的解(见(2.5.16)式), 实际上是(4.4.7)式的极限情形: 在上式中令 $a\to\infty$, 则有

$$p=\frac{2}{\pi}\arccos\frac{b}{l}+\frac{2}{\pi b}[l-(l^2-b^2)^{1/2}]. \tag{4.4.8}$$

情形 3. 设 $a \leqslant l \leqslant (a^2+b^2)^{1/2}$.

这时 $m(l)$ 由(4.3.33)式给出, 由公式(4.4.4), 有

$$p=\frac{1}{\pi ab}\Big[\pi ab-2a(l^2-b^2)^{1/2}-2b(l^2-a^2)^{1/2}+a^2+b^2+l^2$$

$$-2ab\arcsin\frac{a}{l}+2ab\arccos\frac{b}{l}\Big]. \qquad (4.4.9)$$

以上简短的讨论, 显示了测度 $m(l)$ 在处理几何概率问题中的作用. 与经典的 Laplace 推广不同, 在我们刚才的讨论中, 对小针 N 的长度不必加以限制. 对于任意满足

$$0 \leqslant l \leqslant (a^2+b^2)^{1/2}$$

的 l, 我们都给出了解答(即 (4.4.5)、(4.4.7) 及 (4.4.9) 三式). 并且经典的 Buffon 问题和长针 Buffon 问题的解都作为极限情形被此解答所包含.

对于刚才的问题, 也可以换一种方式进行推理. 取 n^2 个小矩形(基本区域)构成边长为 na 和 nb 的大矩形. 假定已知小针 N 落入大矩形内部, 则 N 与此(有限)矩形网格相遇的概率为

$$p_n=q_1/q_2, \qquad (4.4.10)$$

其中 q_1, q_2 由下列各式给出:

当 $0 \leqslant l \leqslant b$ 时, 则

$$q_1=\pi n^2ab-2n(a+b)l+l^2$$

$$-n^2[\pi ab-2(a+b)l+l^2], \qquad (4.4.11)$$

$$q_2=\pi n^2ab-2n(a+b)l+l^2; \qquad (4.4.12)$$

当 $b \leqslant l \leqslant a$ 时, 且 n 足够大(致 $l \leqslant nb$), 则

$$q_1=\pi n^2ab-2n(a+b)l+l^2$$

$$-n^2\Big[\pi ab-2ab\arccos\frac{b}{l}-2la+2a(l^2-b^2)^{1/2}-b^2\Big], \qquad (4.4.13)$$

$$q_2=\pi n^2ab-2n(a+b)l+l^2; \qquad (4.4.14)$$

当 $a \leqslant l \leqslant (a^2+b^2)^{1/2}$ 时, 且 n 足够大, 则

$$q_1=\pi n^2ab-2n(a+b)l+l^2-n^2\Big[2a(l^2-b^2)^{1/2}+2b(l^2-a^2)^{1/2}$$

$$-a^2-b^2-l^2+2ab\arcsin\frac{a}{l}-2ab\arccos\frac{b}{l}\Big], \qquad (4.4.15)$$

$$q_2=\pi n^2ab-2n(a+b)l+l^2. \tag{4.4.16}$$

令 $n\to\infty$，则我们重新得到上述(4.4.5)，(4.4.7)和(4.4.9)三式.

从应用的观点看，也许有限网格模型更有意义，因为无限网格在物理上是不可实现的.

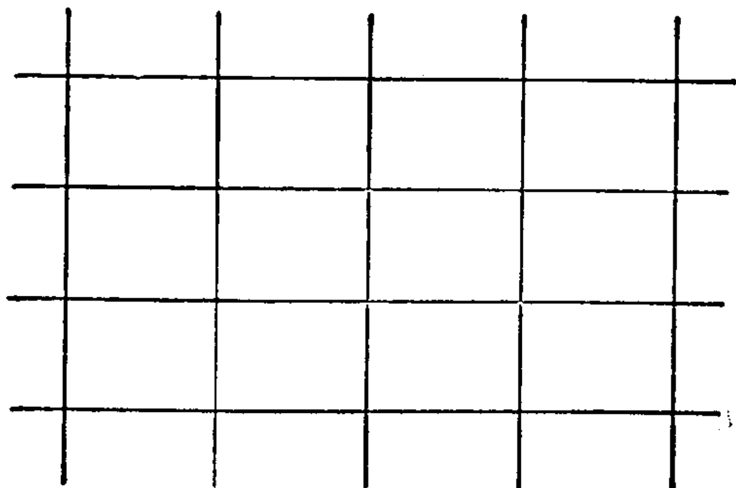


图 4-2

4.4.3 某些凸多边形域的 $m(l)$ 及其应用

上一段详细地讨论了矩形网格的 Buffon 问题. 讨论的方法，同样适用于其他各种凸多边形网格的场合. 张高勇和黎荣泽按照本书作者的建议对某些凸多边形网格进行了讨论，得到一系列结果. [6]

平 行 四 边 形

以 P 表示二邻边分别为 a 和 b、二邻边的夹角为 θ 的平行四边形. 不失一般性，可设 $b\leqslant a,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

平行四边形的广义支持函数是：

$$p(\sigma,\varphi)=\begin{cases}\dfrac{a}{2}\cos\phi+\dfrac{1}{\sin\theta}\left(\sigma\cos\phi-\dfrac{b}{2}\sin\theta\right)\cos(\phi-\theta), & \\ \qquad\text{当 } -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\phi<-\dfrac{\pi}{2}+\theta, & (4.4.17)\\ \dfrac{a}{2}\cos\phi-\dfrac{1}{\sin\theta}\left(\sigma\cos\phi-\dfrac{b}{2}\sin\theta\right)\cos(\phi-\theta), & \\ \qquad\text{当 } -\dfrac{\pi}{2}+\theta\leqslant\phi\leqslant\dfrac{\pi}{2}. & (4.4.18)\end{cases}$$

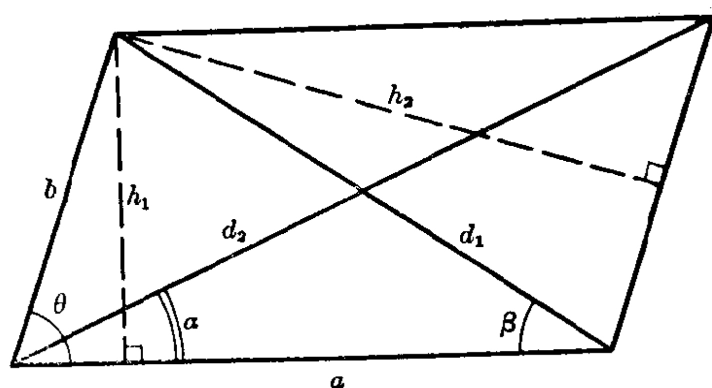


图 4-3

又，d_1, d_2, h_1, h_2, α 及 β 的意义如图所示(对于确定的 a, b 及 θ，这些参数是完全确定的)．平行四边形 P 的限弦函数如下：

(1) 当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\phi<-\frac{\pi}{2}+\alpha$ 时：

$$r(l,\ \phi)=l,\quad \text{当 } 0\leqslant l\leqslant a \text{ 及 } -\frac{\pi}{2}\leqslant\phi<-\frac{\pi}{2}+\alpha \text{ 时;}$$

$$r(l,\ \phi)=-h_2/\cos(\phi-\theta),$$

$$\text{当 } a\leqslant l\leqslant d_2 \text{ 及 } -\frac{\pi}{2}\leqslant\phi<\arccos\frac{h_2}{l}+\theta-\pi \text{ 时;}$$

$$r(l,\ \phi)=l,$$

$$\text{当 } a\leqslant l\leqslant d_2 \text{ 及 } \arccos\frac{h_2}{l}+\theta-\pi\leqslant\phi<-\frac{\pi}{2}+\alpha \text{ 时.}$$

(2) 当 $-\frac{\pi}{2}+\alpha\leqslant\phi<\frac{\pi}{2}-\beta$ 时：

$$r(l,\ \phi)=l,\quad \text{当 } 0\leqslant l<h_1 \text{ 及 } -\frac{\pi}{2}+\alpha\leqslant\phi<0 \text{ 时;}$$

$$r(l,\ \phi)=l,$$

$$\text{当 } h_1\leqslant l<d_1 \text{ 及} -\frac{\pi}{2}+\alpha\leqslant\phi<-\arccos\frac{h_1}{l} \text{ 时;}$$

$$r(l,\ \phi)=h_1/\cos\phi,\quad \text{当 } h_1\leqslant l<d_1 \text{ 及 } -\arccos\frac{h_1}{l}\leqslant\phi<0 \text{ 时;}$$

$$r(l,\ \phi)=l,\quad \text{当 } 0\leqslant l<h_1 \text{ 及 } 0\leqslant\phi<\frac{\pi}{2}-\beta \text{ 时;}$$

$$r(l,\ \phi)=h_1/\cos\phi,\quad \text{当 } h_1\leqslant l<d_1 \text{ 及 } 0\leqslant\phi<\arccos\frac{h_1}{l} \text{ 时;}$$

$$r(l,\ \phi)=l,\quad 当\ h_1\leqslant l<d_1\ 及\ \arccos\frac{h_1}{l}\leqslant\phi<\frac{\pi}{2}-\beta\ 时;$$

$$r(l,\ \phi)=l,\quad 当\ d_1\leqslant l\leqslant d_2\ 及\ -\frac{\pi}{2}+\alpha\leqslant\phi<-\arccos\frac{h_1}{l}\ 时;$$

$$r(l,\ \phi)=h_1/\cos\phi,$$

$$当\ d_1\leqslant l\leqslant d_2\ 及\ -\arccos\frac{h_1}{l}\leqslant\phi<\frac{\pi}{2}-\beta\ 时;$$

(3) 当 $\frac{\pi}{2}-\beta\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时(分三款):

(i) 若 $\theta+\beta<\frac{\pi}{2}$(此时必有 $a\geqslant d_1$):

$$r(l,\ \phi)=l,\ 当\ 0\leqslant l<h_2\ 及\ \frac{\pi}{2}-\beta\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}\ 时;\quad r(l,\ \phi)=l,$$

$$当\ h_2\leqslant l\leqslant d_1\ 及\ \frac{\pi}{2}-\beta\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}\ 时;\ r(l,\ \phi)=l,$$

$$当\ d_1\leqslant l\leqslant a\ 及\ \frac{\pi}{2}-\beta\leqslant\phi<\theta-\arccos\frac{h_2}{l}\ 时;\ r(l,\phi)=h_2/\cos(\phi-\theta),$$

$$当\ d_1\leqslant l<a\ 及\ \theta-\arccos\frac{h_2}{l}\leqslant\phi<\theta+\arccos\frac{h_2}{l}\ 时;\ r(l,\ \phi)=l,$$

$$当\ d_1\leqslant l<a\ 及\ \theta+\arccos\frac{h_2}{l}\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}\ 时;\ r(l,\phi)=h_2/\cos(\phi-\theta),$$

$$当\ a\leqslant l\leqslant d_2\ 及\ \frac{\pi}{2}-\beta\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}\ 时.$$

(ii) 若 $\theta+\beta\geqslant\frac{\pi}{2}$ 且 $d_1\leqslant a$:

$$r(l,\ \phi)=l,\quad 当\ 0\leqslant l\leqslant h_2\ 及\ \frac{\pi}{2}-\beta\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}\ 时;$$

$$r(l,\ \phi)=l,\quad 当\ h_2\leqslant l<d_1\ 及\ \frac{\pi}{2}-\beta\leqslant\phi<\theta-\arccos\frac{h_2}{l}\ 时;$$

$$r(l,\ \phi)=h_2/\cos(\phi-\theta),$$

$$当\ h_2\leqslant l<d_1\ 及\ \theta-\arccos\frac{h_2}{l}\leqslant\phi<\theta+\arccos\frac{h_2}{l}\ 时;$$

$$r(l,\ \phi)=l,\quad 当\ h_2\leqslant l<d_1\ 及\ \theta+\arccos\frac{h_2}{l}\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2}\ 时;$$

$$r(l,\ \phi)=h_2/\cos(\phi-\theta),$$

$$当\ d_1 \leqslant l < a\ 及\ \frac{\pi}{2} - \beta \leqslant \phi < \theta + \arccos \frac{h_2}{l}\ 时;$$

$$r(l,\ \phi) = l, \quad 当\ d_1 \leqslant l < a\ 及\ \theta + \arccos \frac{h_2}{l} \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{2}\ 时;$$

$$r(l,\ \phi) = h_2/\cos(\phi - \theta), \quad 当\ a \leqslant l \leqslant d_2\ 及\ \frac{\pi}{2} - \beta \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{2}\ 时.$$

(iii) 若 $\theta + \beta \geqslant \frac{\pi}{2}$ 且 $d_1 \geqslant a$:

$$r(l,\ \phi) = l, \quad 当\ 0 \leqslant l < h_2\ 及\ \frac{\pi}{2} - \beta \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{2}\ 时;$$

$$r(l,\ \phi) = l,$$

$$当\ h_2 \leqslant l < a\ 及\ \frac{\pi}{2} - \beta \leqslant \phi < \theta - \arccos \frac{h_2}{l}\ 时;$$

$$r(l,\ \phi) = h_2/\cos(\phi - \theta),$$

$$当\ h_2 \leqslant l < a\ 及\ \theta - \arccos \frac{h_2}{l} \leqslant \phi < \theta + \arccos \frac{h_2}{l}\ 时;$$

$$r(l,\ \phi) = l,$$

$$当\ h_2 \leqslant l < a\ 及\ \theta + \arccos \frac{h_2}{l} \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{2}\ 时;$$

$$r(l,\ \phi) = l,$$

$$当\ a \leqslant l < d\ 及\ \frac{\pi}{2} - \beta \leqslant \phi < \theta - \arccos \frac{h_2}{l}\ 时;$$

$$r(l,\ \phi) = h_2/\cos(\phi - \theta),$$

$$当\ a \leqslant l < d\ 及\ \theta - \arccos \frac{h_2}{l} \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{2}\ 时;$$

$$r(l,\ \phi) = h_2/\cos(\phi - \theta),$$

$$当\ d_1 \leqslant l \leqslant d_2\ 及\ \frac{\pi}{2} - \beta \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{2}\ 时.$$

找出 P 的广义支持函数和限弦函数以后，根据上一节的公式可以算出各种情况下 $m(l)$ 的表达式. 我们有

$$m(l) = \pi ab \sin\theta - 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{r(l,\phi)} p(\sigma,\ \phi)\, d\sigma. \quad (4.4.19)$$

将上式右方出现的积分记为 I，即

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{r(l,\phi)} p(\sigma,\phi)d\sigma, \qquad (4.4.20)$$

且将 $\arccos\frac{h_1}{l}$ 记为 ϕ_1, $\arccos\frac{h_2}{l}$ 记为 ϕ_2. 在各种情形下, I 的计算结果如下:

A. 设 $0\leqslant h_1\leqslant b\leqslant h_2\leqslant a\leqslant d_1\leqslant d_2$.

A_1. 当 $0\leqslant l<h_1$ 时,

$$I=(a+b)l+\frac{l^2}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\theta-\frac{l^2}{2}. \qquad (4.4.21)$$

A_2. 当 $h_1\leqslant l<b$ 时,

$$I=(a+b)l+ah_1\arccos\frac{h_1}{l}-\left(a+\frac{1}{2}bl\cos\theta\right)\sqrt{l^2-h_1^2}$$

$$-\frac{l^2}{2}-\frac{l^2}{2}\operatorname{ctg}\theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta-\arccos\frac{h_1}{l}\right). \qquad (4.4.22)$$

A_3. 当 $b\leqslant l<h_2$ 时,

$$I=ah_1\arccos\frac{h_1}{l}+al-a\sqrt{l^2-h_1^2}+\frac{1}{2}h_1^2. \qquad (4.4.23)$$

A_4. 当 $h_2\leqslant l<a$ 时,

$$I=ah_1\arccos\frac{h_1}{l}+bh_2\arccos\frac{h_2}{l}+al$$

$$-a\sqrt{l^2-h_1^2}-\frac{a}{2}\cos\theta\sqrt{l^2-h_2^2}+b\cos\theta\sqrt{l^2-h_1^2}$$

$$+\frac{l^2}{2}\operatorname{ctg}\theta\cdot\arccos\frac{h_2}{l}-\frac{1}{2}h_1^2. \qquad (4.4.24)$$

A_5. 当 $a\leqslant l<d_1$ 时,

$$I=ah_1\phi_1+bh_2\phi_2+\frac{h_2^2}{2}-a\sqrt{l^2-h_1^2}-b\sqrt{l^2-h_2^2}$$

$$+\frac{l^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\operatorname{ctg}\theta+\frac{l^2}{2}+\frac{h_1^2}{2}. \qquad (4.4.25)$$

A_6. 当 $d_1\leqslant l\leqslant d_2$ 时,

$$I=\frac{1}{2}ah_1(\theta+\phi_1+\phi_2)$$

$$+\frac{1}{2}al\left[\sin(\theta+\phi_2)-\sin\phi_1\right]-\frac{1}{2}bl\left[\sin\phi_2-\sin(\phi_1+\theta)\right]$$

$$+\frac{l^2}{4}\{\mathrm{ctg}\theta[\pi-\phi_1-\theta-\phi_2-\sin\phi_1\cos\phi_1$$

$$-\sin(\theta+\phi_2)\cos(\theta+\phi_2)]$$

$$+\cos^2(\theta+\phi_2)-\cos^2\phi_1\}. \tag{4.4.26}$$

B. 设 $0\leqslant h_1\leqslant b\leqslant h_2\leqslant d_1\leqslant a\leqslant d_2$.

B_1. 当 $0\leqslant l<h_1$ 时，同 A_1.

B_2. 当 $h_1\leqslant l<b$ 时，同 A_2.

B_3. 当 $b\leqslant l<h_2$ 时，同 A_3.

B_4. 当 $h_2\leqslant l<d_1$ 时，

若 $\theta+\beta<\frac{\pi}{2}$，同 A_3; 若 $\theta+\beta\geqslant\frac{\pi}{2}$，同 A_4.

B_5. 当 $d_1\leqslant l<a$ 时，

若 $\theta+\beta<\frac{\pi}{2}$，同 A_4; 若 $\theta+\beta\geqslant\frac{\pi}{2}$，则

$$I=\frac{1}{2}ah_1(\theta+\phi_1+\phi_2)+al[2-\sin\phi_1-\sin(\theta+\phi_2)]$$

$$+\frac{1}{4}l^2\{\mathrm{ctg}\,\theta[\theta+\phi_2-\phi_1-\sin\phi_1\cos\phi_1$$

$$+\sin(\theta+\phi_2)\cos(\theta+\phi_2)]-\cos^2\phi_1-\cos^2(\theta+\phi_2)\}$$

$$+\frac{1}{2}bl[\sin(\theta+\phi_1)-\sin\phi_2]. \tag{4.4.27}$$

B_6. 当 $d_1\leqslant l\leqslant d_2$ 时，同 A_6.

C. 设 $0\leqslant h_1\leqslant h_2\leqslant b\leqslant a\leqslant d_1\leqslant d_2$.

C_1. 当 $0\leqslant l\leqslant h_1$ 时，同 A_1.

C_2. 当 $h_1\leqslant l\leqslant h_2$ 时，同 A_2.

C_3. 当 $h_2\leqslant l<b$ 时，

$$I=al(1-\sin\phi_1-\cos\theta\sin\phi_2)+bl(1-\sin\theta\cos\phi_1)$$

$$+\frac{1}{4}l^2\,\mathrm{ctg}\,\theta(-\pi-\sin 2\theta+2\theta+2\phi_1+2\phi_2$$

$$+\sin 2\phi_1+\sin 2\theta\cos 2\phi_2)$$

$$-\frac{1}{4}l^2(2\sin^2\theta-\sin 2\theta\sin 2\phi_2). \tag{4.4.28}$$

C_4. 当 $b\leqslant l<a$ 时，同 A_4.

C_5．当 $a\leqslant l<d_1$ 时，同 A_5.

C_6．当 $d_1\leqslant l\leqslant d_2$ 时，同 A_6.

D．设 $0\leqslant h_1\leqslant h_2\leqslant b\leqslant d_1\leqslant a\leqslant d_2$.

D_1．当 $0\leqslant l<h_1$ 时，同 A_1.

D_2．当 $h_1\leqslant l<h_2$ 时，同 A_2.

D_3．当 $h_2\leqslant l<b$ 时，

若 $\theta+\beta<\frac{\pi}{2}$，同 A_2; 若 $\theta+\beta\geqslant\frac{\pi}{2}$，同 C_3.

D_4．当 $b\leqslant l<a$ 时，同 B_4.

D_5．当 $a\leqslant l<d_1$ 时，同 B_5.

D_6．当 $d_1\leqslant l\leqslant d_2$ 时，同 A_6.

E．设 $0\leqslant h_1\leqslant h_2\leqslant d_1\leqslant b\leqslant a\leqslant d_2$.

E_1．当 $0\leqslant l<h_1$ 时，同 A_1.

E_2．当 $h_1\leqslant l<h_2$ 时，同 A_2.

E_3．当 $h_2\leqslant l<d_1$ 时，

若 $\theta+\beta<\frac{\pi}{2}$，同 A_2; 若 $\theta+\beta\geqslant\frac{\pi}{2}$，同 C_3.

E_4．当 $d_1\leqslant l<b$ 时，

若 $\theta+\beta<\frac{\pi}{2}$，同 C_3; 若 $\theta+\beta\geqslant\frac{\pi}{2}$，则

$$\begin{aligned}I=&\frac{1}{2}ah_1(\theta+\phi_1+\phi_2)\\&+\frac{1}{2}al[2-\sin\phi_1-\sin(\theta+\phi_2)]\\&+\frac{1}{2}bl[2-\sin\phi_2-\sin(\theta+\phi_1)]\\&-\frac{l^2}{4}[2\sin^2\theta-\cos^2\phi_1+\cos^2(\theta+\phi_2)]\\&-\frac{l^2}{4}\operatorname{ctg}\theta\left[\pi-3\theta+\sin 2\theta-\phi_1-\phi_2\right.\\&\left.-\frac{1}{2}\sin 2\phi_1-\frac{1}{2}\sin 2(\theta+\phi_2)\right].\end{aligned}\tag{4.4.29}$$

E_5．当 $b\leqslant l<a$ 时，同 B_5.

E_6. 当 $a \leqslant l \leqslant d_2$ 时, 同 A_6.

三 角 形

对于任意三角形域，同样可算出具体结果．这里仅就一重要特殊情形——正三角形域，录出其 $m(l)$ 之表达式.

边长为 a 的正三角形域的 $m(l)$ 如下：

当 $0 \leqslant l < \frac{\sqrt{3}}{2}a$ 时,

$$m(l) = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi a^2 - 3al + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi l^2 + \frac{3}{4}l^2; \quad (4.4.30)$$

当 $\frac{\sqrt{3}}{2}a \leqslant l \leqslant a$ 时,

$$m(l) = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi a^2 - 3al + \frac{9}{2}a\left(l^2 - \frac{3}{4}a^2\right)^{1/2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi l^2$$
$$+ \frac{3}{4}l^2 - \left(\sqrt{3}\,l^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\right)\arccos\frac{\sqrt{3}\,a}{2l}. \quad (4.4.31)$$

正 六 边 形

边长为 R 的正六边形域的 $m(l)$ 是：

当 $0 \leqslant l < R$ 时,

$$m(l) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi R^2 - 6Rl - \frac{\sqrt{3}\pi l^2}{6} + \frac{3}{2}l^2; \quad (4.4.32)$$

当 $R \leqslant l < \sqrt{3}R$ 时,

$$m(l) = \frac{5\sqrt{3}}{2}\pi R^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\pi l^2 - (3\sqrt{3}R^2 + 2\sqrt{3}l^2)$$
$$\cdot \arcsin\frac{\sqrt{3}R}{2l} - \frac{9R}{2}\sqrt{4l^2 - 3R^2}; \quad (4.4.33)$$

当 $\sqrt{3}R \leqslant l \leqslant 2R$ 时,

$$m(l) = 2\sqrt{3}\pi R^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi l^2 - 9R^2 - \frac{3}{2}l^2 + 15R\sqrt{l^2 - 3R^2}$$

$$-(12\sqrt{3}R^2+\sqrt{3}l^2)\arccos\frac{\sqrt{3}R}{l}. \qquad (4.4.34)$$

有了以上的凸多边形域的 $m(l)$ 以后，我们立即能够将 Buffon 问题推广到相应的网格情形.

用边长为 a 的正三角形域作为基本区域构成三角形网格. 将长度等于 l 的小针 N 随机地投掷于平面上，则 N 与该三角形网格相遇的概率为：

当 $0\leqslant l\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 时，

$$p=\left(\pi\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)^{-1}\left(3al-\frac{3}{4}l^2-\frac{\pi l^2}{2\sqrt{3}}\right); \qquad (4.4.35)$$

当 $\frac{\sqrt{3}}{2}a\leqslant l\leqslant a$ 时，

$$p=\left(\pi\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)^{-1}\left[3al-\frac{3}{4}l^2-\frac{\pi l^2}{2\sqrt{3}}-\frac{9a}{4}(4l^2-3a^2)^{1/2}\right.$$

$$\left.+\left(\sqrt{3}l^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\right)\arccos\frac{\sqrt{3}a}{2l}\right]. \qquad (4.4.36)$$

同样，用边长为 R 的正六边形域可构成一六边形网格. 将长度等于 l 的小针 N 随机地投掷于平面上，则 N 与该网格相遇的概率为：

当 $0\leqslant l\leqslant R$ 时，

$$p=\frac{1}{3\sqrt{3}\pi R^2}\left(12Rl+\frac{\pi l^2}{\sqrt{3}}-3l^2\right); \qquad (4.4.37)$$

当 $R\leqslant l\leqslant\sqrt{3}R$ 时，

$$p=\frac{1}{3\sqrt{3}\pi R^2}\left[9R(4l^2-3R^2)^{1/2}-2\sqrt{3}\pi R^2-\sqrt{3}\pi l^2\right.$$

$$\left.+(6\sqrt{3}R^2+4\sqrt{3}l^2)\arcsin\frac{\sqrt{3}R}{2l}\right]; \qquad (4.4.38)$$

当 $\sqrt{3}R\leqslant l\leqslant 2R$ 时，

$$p=\frac{1}{3\sqrt{3}\pi R^2}\left[18R^2+3l^2-\sqrt{3}\ \pi R^2-\frac{\pi l^2}{\sqrt{3}}\right.$$

$$\left.-30R(l^2-3R^2)^{1/2}+(24\sqrt{3}\,R^2+2\sqrt{3}\ l^2)\arccos\frac{\sqrt{3}\,R}{l}\right].$$

(4.4.39)

对于用前述平行四边形域作为基本区域所构成的平行四边形网格，依照平行四边形的类型以及 l 的所属范围，可以得到各种情形下 Buffon 问题的解．例如

(A_1 型)：

$$p=\frac{1}{\pi ab\sin\theta}\left[2(a+b)l-l^2-l^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\operatorname{ctg}\theta\right];$$

(4.4.40)

(A_2 型)：

$$p=\frac{1}{\pi ab\sin\theta}\left[2(a+b)l+2ah_1\arccos\frac{h_1}{l}\right.$$
$$-(2a+bl\cos\theta)(l^2-h_1^2)^{1/2}-l^2$$
$$\left.-l^2\operatorname{ctg}\theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta-\arccos\frac{h_1}{l}\right)\right]; \qquad (4.4.41)$$

(A_3 型)：

$$p=\frac{1}{\pi ab\sin\ \theta}\left[2ah_1\arccos\frac{h_1}{l}+2al\right.$$
$$\left.-2a(l^2-h_1^2)^{1/2}+h_1^2\right], \qquad (4.4.42)$$

等等．其余各款在此不复一一列举．

应当指出，以上的讨论仅仅是示范性质的．与其说我们在这里提供了若干几何概率的结果，毋宁说我们提供了处理一类问题的方法．

附带指出，我们可以毫无困难地将 Buffon 问题推广到带状网格的场合．另外，若将基本区域剖分成有限个小的凸域便形成新的网格，如果已将基本区域及诸小区域的 $m(l)$ 算出，那么 Buffon 问题便能推广到这个新形成的网格．

§ 4.5 与 π 的统计估计有关的一个问题

4.5.1 平行线网

Buffon 问题的解答，在历史上第一次开辟了对 π 作统计估计的途径. 由于 Buffon 问题的解使 π 与 Buffon 概率 p 相联系，因而 π 的统计估计问题，实质上是 Buffon 概率的统计估计问题.

考虑间隔为 1 的平行线网. 设 n 为投针次数，s 为小针实际与网相遇的次数，则

$$\hat{p}=sn^{-1} \tag{4.5.1}$$

是 Buffon 概率 p（即小针与网相遇的概率）的一个无偏估计. 事实上，考虑以

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

为密度矩阵的随机变数 ξ. 投针 n 次，相当于对 ξ 进行 n 次独立观察，得一容量为 n 的子样 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$. 由(4.5.1)式给出的估计 $\hat{p}$ 实际上就是子样的平均值：

$$\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i.$$

由于 $E\bar{\xi}=p=E\xi$，故 $\hat{p}$ 是 p 的无偏估计. 另外，不难看出，此估计的方差为

$$D\hat{p}=D\bar{\xi}=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\xi_i=\frac{1}{n}p(1-p). \tag{4.5.2}$$

下表是一个历史的记录：

试验者	针长	投针次数	触网次数	π 的估值
Wolf, 1850	0.8	5000	2532	3.1596
Smith, 1855	0.6	3204	1218.5	3.1553
De Morgan, c. 1860	1.0	600	382.5	3.137
Fox, 1884	0.75	1030	489	3.1595
Lazzerini, 1901	0.83	3408	1808	3.1415929
Reina, 1925	0.5419	2520	859	3.1795
Gridgeman, c. 1960	0.7857	2	1	3.143

4.5.2 矩形网格 独立性条件

Schuster (1974) 从试验设计的观点出发，提出如下的有趣的问题：一个试验者将长度为 l 的小针向布有间隔为 $2l$ 的平行线网的平面上投掷 200 次，记下小针与网相遇的次数；另一个试验者向布有正方形网格(以边长等于 $2l$ 的正方形作为基本区域)的平面上投掷小针 100 次，并分别记录小针与每组平行线网相遇的次数(注意，此正方形网格可看作是由两组互相正交的间隔为 $2l$ 的平行线网组成)．对于 π 的统计估计来说，这两种试验是否提供了同样的统计信息？

现在我们就矩形网格的情形作一般性的讨论．设平面上有两组互相正交的平行线网，其中一组间隔为 b(不妨假定它平行于 ox 轴)，另一组间隔为 a(平行于 oy 轴)．设 $b\leqslant a$．在随机投针的试验中，以 A 表示小针与平行于 ox 轴的平行线网相遇事件，以 B 表示小针与平行于 oy 轴的平行线网相遇事件．本段中我们先来探讨事件 A 与事件 B 是否独立的问题．

由于

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B), \tag{4.5.3}$$

其中 $P(A\cup B)$ 为小针与矩形网格相遇的概率．故根据二事件独立的定义，得到事件 A 与事件 B 互相独立的条件：

$$P(A)\cdot P(B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B). \tag{4.5.4}$$

对于矩形网格，当针长不超过基本区域较短边时(即 $l\leqslant b$)，我们有

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{2l}{\pi b}\cdot\frac{2l}{\pi a}=\frac{4l^2}{\pi^2 ab},$$

$$P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$=\frac{2l}{\pi b}+\frac{2l}{\pi a}-\frac{2l(a+b)-l^2}{\pi ab}=\frac{l^2}{\pi ab},$$

其中 $P(A\cup B)$ 取(4.4.5)式．显然此时条件(4.5.3)不成立．

4.5.3 有效性分析

以 ξ, η 表示下列随机变数：

$$\xi=\begin{cases}1, & \text{当小针与平行于 } ox \text{ 轴之平行线网相遇,}\\ 0, & \text{当小针与平行于 } ox \text{ 轴之平行线网不相遇;}\end{cases}$$

$$\eta=\begin{cases}1, & \text{当小针与平行于 } oy \text{ 轴之平行线网相遇,}\\ 0, & \text{当小针与平行于 } oy \text{ 轴之平行线网不相遇.}\end{cases}$$

现在我们来考察

$$\hat{p}=\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{100}(\xi_i+\eta_i) \tag{4.5.5}$$

的有效性．我们有

$$D(\xi_i+\eta_i)=D\xi_i+D\eta_i+2E\{(\xi_i-E\xi_i)(\eta_i-E\eta_i)\}. \tag{4.5.6}$$

由于

$$D\xi_i=P(A)[1-P(A)], \tag{4.5.7}$$

$$D\eta_i=P(B)[1-P(B)], \tag{4.5.8}$$

$$\begin{aligned}E\{(\xi_i-E\xi_i)(\eta_i-E\eta_i)\}&=E(\xi_i\eta_i)-E\xi_iE\eta_i\\&=P(AB)-P(A)P(B),\end{aligned} \tag{4.5.9}$$

从而有

$$\begin{aligned}D(\xi_i+\eta_i)=&P(A)+P(B)+2P(AB)\\&-[P(A)+P(B)]^2.\end{aligned} \tag{4.5.10}$$

再利用(4.5.3)式，得到

$$\begin{aligned}D(\xi_i+\eta_i)=&3P(A)+3P(B)\\&-[P(A)+P(B)]^2-2P(A\cup B).\end{aligned} \tag{4.5.11}$$

在条件 $l\leqslant b\leqslant a$ 之下，

$$\begin{aligned}D(\xi_i+\eta_i)=&3\cdot\frac{2l}{\pi b}+3\cdot\frac{2l}{\pi a}\\&-\left(\frac{2l}{\pi b}+\frac{2l}{\pi a}\right)^2-2\cdot\frac{2l(a+b)-l^2}{\pi ab}\\=&\frac{2}{\pi}\left[\frac{l}{b}+\frac{l}{a}+\frac{l^2}{ab}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{l}{b}+\frac{l}{a}\right)^2\right].\end{aligned} \tag{4.5.12}$$

由此得到(4.5.5)式所表示的 $\hat{p}$ 之方差

$$D\hat{p}=\frac{1}{(200)^2}\cdot(100)\cdot D(\xi_i+\eta_i)$$

$$=\frac{1}{400}\cdot\frac{2}{\pi}\left[\frac{l}{b}+\frac{l}{a}+\frac{l^2}{ab}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{l}{b}+\frac{l}{a}\right)^2\right]. \qquad (4.5.13)$$

另一方面，考虑与 ox 轴平行的平行线网，投针 M 次. 置

$$\hat{p}_x=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\xi_i. \qquad (4.5.14)$$

则

$$D\hat{p}_x=\frac{1}{M^2}\cdot(M)\cdot\frac{2l}{\pi b}\left(1-\frac{2l}{\pi b}\right)$$

$$=\frac{1}{M}\cdot\frac{2l}{\pi b}\left(1-\frac{2l}{\pi b}\right). \qquad (4.5.15)$$

若要求 $D\hat{p}_x=D\hat{p}$，并记 $l/b=u$, $a/b=k$，则由(4.5.13)和(4.5.15)二式有

$$M=\frac{400\left(1-\frac{2}{\pi}u\right)}{1+\frac{1}{k}+\left[\frac{1}{k}-\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{k}\right)^2\right]u}. \qquad (4.5.16)$$

同样，考虑平行于 oy 轴的平行线网，投针 N 次，并置

$$\hat{p}_y=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\eta_i. \qquad (4.5.17)$$

令 $D\hat{p}_y=D\hat{p}$，则有

$$N=\frac{400\cdot\frac{1}{k}\left(1-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{k}u\right)}{1+\frac{1}{k}+\left[\frac{1}{k}-\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{k}\right)^2\right]u}. \qquad (4.5.18)$$

例如，对 $k=1$（即正方形网格），有：

当 $u=0$ 时，$M=N=200$;

当 $u=1/2$ 时，$M=N=222.27326$;

当 $u=1$ 时，$M=N=320.49701$.

又如，对于 $k=2$（即 $a=2b$）：

当 $u=0$ 时，$M=266.66667$, $N=133.33333$;

当 $u=1/2$ 时，$M=263.76022$, $N=162.67031$;

当 $u=1$ 时，$M=256.07943$, $N=240.19856$.

上述计算结果的意义可解释如下：以 $k=1$、$u=\frac{1}{2}$ 为例，计算

的结果是 $M=N\approx 222$，它表明我们利用正方形网格作投针试验100次，大致相当于利用单一的平行线网作投针试验222次．确切地说，利用正方形网格投针100次(针长 l 等于正方形边长之半)，且由

$$\hat{p}=\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{100}(\xi_i+\eta_i)$$

对 Buffon 概率 p 作统计估计，其方差与利用单一的平行线网投针222次并由

$$\hat{p}_x=\frac{1}{222}\sum_{i=1}^{222}\xi_i$$

对相应的 Buffon 概率作统计估计的方差近似相等．

注意，在上述讨论中，无论是独立性条件的检验或是有效性分析，都是就 $l\leqslant b$ 的情况展开的．其实对于 $b\leqslant l\leqslant a$ 及 $a\leqslant l\leqslant (a^2+b^2)^{1/2}$ 两款同样可以进行讨论．因为上述讨论中关键之点在于利用了 $P(A\cup B)$，即小针与网格相遇的概率；这些概率表达式在上一节利用 $m(l)$ 都已一一求出．

4.5.4 平行四边形网格

在§4.4中我们已经介绍过关于平行四边形网格的 Buffon 问题的完整的结果，因此前两段探讨的课题也可以就平行四边形网格情形展开讨论．这里我们仅就独立性问题作一简短的讨论．

首先我们应当注意，在4.5.2段中导出的独立性条件(4.5.4)同样适用于现在的场合．现在我们要问：怎样的平行四边形能使独立性条件(4.5.4)成立？

根据4.4.3段中所给出的各种类型的平行四边形域的 $P(A\cup B)$ 之表达式，并利用条件(4.5.4)式，不难回答这一问题．例如，若平行四边形为 A 型，且 $0\leqslant l\leqslant h_1$，即属于 A_1 款．此时

$$P(A)=\frac{2l}{\pi h_1},\quad P(B)=\frac{2l}{\pi h_2},$$

$$P(A\cup B)=\frac{2l(a+b)-l^2\left[1+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\operatorname{ctg}\theta\right]}{\pi ab\sin\theta}$$

$$=\frac{2l(h_1+h_2)-l^2\left[\sin\theta+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\theta\right]}{\pi h_1h_2},$$

其中 $P(A\cup B)$ 由(4.4.40)式给出．将这些表达式代入(4.5.4)式得

$$\sin\theta+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\theta=\frac{4}{\pi},\ \theta\approx 0.76605(\text{弧度}).\qquad(4.5.19)$$

又如，对于 A_3 款 $(h_1\leqslant b\leqslant l\leqslant h_2)$，这时

$$P(A)=\frac{2}{\pi}\arccos\frac{h_1}{l}+\frac{2}{\pi h_1}[l-(l^2-h_1^2)^{1/2}],$$

$$P(B)=\frac{2l}{\pi h_2},$$

$$P(A\cup B)=\frac{2ah_1\arccos\frac{h_1}{l}+2al-2a(l^2-h_1^2)^{1/2}+h_1^2}{\pi ab\sin\theta}$$

$$=\frac{2h_1h_2\arccos\frac{h_1}{l}+2h_2l-2h_2(l^2-h_1^2)^{1/2}+h_1^2\sin\theta}{\pi h_1h_2},$$

其中 $P(A\cup B)$ 的表达式来自 (4.4.42) 式．将这些表达式代入(4.5.4)式，得独立性成立的条件：

$$\sin\theta=\frac{1}{\pi h_1^2}\left[2\pi lh_1-4lh_1\arccos\frac{h_1}{l}-4l^2+4l(l^2-h_1^2)^{1/2}\right].$$

$$(4.5.20)$$

令 $l/h_1=k$，则上式可改写为

$$\sin\theta=\frac{4k}{\pi}\left[\arcsin\frac{1}{k}-k+(k^2-1)^{1/2}\right].\qquad(4.5.21)$$

例如，当 $k=2$ 时，$\theta\approx 0.7089094$(弧度)$\approx 40.6°$．

本章参考文献

[1] 任德麟，"关于一域含有另一域的条件"，待发表．

[2] H. Hadwiger, "Überdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate", Comment. Math. Helr. 13 (1941), 195～200.

[3] H. Hadwiger, "Gegenseitige Bedeckbarkeit zweier Eibereiche und Isoperimetrie", Vierteljschr. Naturforsch. Gesellsch. Zürich 86 (1941), 152～156.

[4] 任德麟(Ren Delin), "The generalized support function and its applications",

Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, 1367～1378.

[5] J. V. Uspensky, «Introduction to Mathematical Probability», McGraw-Hill, New York, 1937.

[6] 张高勇、黎荣泽，“某些凸多边形内定长线段运动测度公式及其在几何概率中的应用”，武汉钢铁学院学报，1983.

第 五 章

齐性空间积分几何的理论基础

在前几章中，我们从初等的观点出发比较详细地讨论了平面上的积分几何．在那里，点、直线以及其他几何元素的密度和这些元素集的测度，是逐一进行讨论的．然而，从实质上说来，积分几何所讨论的乃是具有同一个变换群的两个齐性空间．陈省身于1940年前后洞察到这一事实，将积分几何推广到齐性空间，使积分几何的研究进入到一个崭新的、更富有成效的阶段．

进行一般性讨论的框架由下述相互联系的两部分构成：第一，包含某些几何对象的一个基本空间 M（在前面，我们取平面 E_2 作为这样的空间，其中几何对象有点、直线、带域、点偶等等，或更一般的全等图形）；第二，作用于 M 上的变换群 G（在前面，我们以 E_2 上的运动群作为 G）．

本章前四节对下面要用到的微分流形的基础知识作一简要回顾（更详尽的说明可参考有关专著）．接着在第五节论述李群及其运动密度，第六节介绍齐性空间的密度和测度，它们是以下两章的基础．最后提示一下应用．

§5.1 微 分 流 形

5.1.1 拓扑空间

为了说明什么是微分流形，先扼要回忆一下拓扑空间概念．我

们知道，以欧氏空间为基础加以抽象化，即以欧氏空间中距离概念的本质属性作为公理定义“度量”，得到度量空间概念；将此过程再进一步，便导致拓扑空间概念．在拓扑空间中，不再有所谓“度量”或“距离”，但依然可以谈论连续性和收敛性．事实上，在度量空间中连续性和收敛性并不依赖于度量本身，而仅取决于由度量所决定的开集．在度量空间中，开集是借度量来定义的，由此再讨论开集的性质．而在拓扑空间中，则是利用度量空间中开集的基本性质作为公理，把空间中一些子集界定为“开集”．

定义 1 设 X 为一集．所谓集 X 上的一个**拓扑**，是指满足下述条件的子集族 $\mathscr{T}$：

1° 空集 $\emptyset\in\mathscr{T}$，$X\in\mathscr{T}$；

2° 属于 $\mathscr{T}$ 的任意多个成员之并也属于 $\mathscr{T}$；

3° 属于 $\mathscr{T}$ 的有限多个成员之交也属于 $\mathscr{T}$．

凡属于 $\mathscr{T}$ 的成员皆称为 X 的($\mathscr{T}$)**开集**，在不致引起误会的情况下，简称为开集．

定义 2 设 $\mathscr{T}$ 是集 X 上的一个拓扑．序偶$(X,\ \mathscr{T})$称为**拓扑空间**．X 叫做此拓扑空间的基集．拓扑空间$(X,\ \mathscr{T})$常简记为 X．

利用拓扑空间中的开集概念，立即可定义邻域．设$(X,\ \mathscr{T})$为拓扑空间，$x\in X$，V 为 X 的一子集．若存在 $U\in\mathscr{T}$ 致 $x\in U\subset V$，则称 V 是 x 的一个邻域．有了邻域概念，便可表述所谓 Hausdorff 公理：X 中任意二不相同之点，必能分别属于二不相交的邻域，即设 x_1，$x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，必存在 x_1 之邻域 U_1 和 x_2 之邻域 U_2 致 $U_1\cap U_2=\emptyset$．满足此公理的拓扑空间称为 Hausdorff 空间．除 Hausdorff 分离公理而外，还有其他的分离公理，相应地亦有各种拓扑空间．但其中以 Hausdorff 拓扑空间应用较广，这是由于这种空间已足够广泛而同时又具备相当良好的性质．

利用邻域或直接引用开集概念，可以定义二拓扑空间之间的映射的连续性．设 f：$X\to Y$ 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射，$x\in X$．若对于 $f(x)$ 在 Y 中的每个邻域 N，存在 x 在 X 中的

某邻域 M 致 $f(M)\subset N$，则称映射 f 在 x 处是连续的．若 f 在 X 的每一点处连续，便称 f 在 X 上连续．

在拓扑学中至为重要的同胚映射，是一种特殊的连续映射．

定义 3 设 X，Y 皆为拓扑空间．若 $f: X\to Y$ 是双射，且映射 f 及其逆映射 f^{-1} 皆连续，则称 f 是同胚映射，并称 X 同胚于 Y．

5.1.2 拓扑流形与微分流形

有了上述简要的说明以后，可以叙述拓扑流形的概念了．

定义 1 一个 n 维拓扑流形（简称流形）M，是具有下列性质的一个拓扑空间：

1° M 是 Hausdorff 拓扑空间；

2° M 是局部（n 维）欧氏的；

3° M 有可数开集基．

其中第 2° 款"M 是局部 n 维欧氏的"其确切含义是：对每一点 $p\in M$，存在这样一个邻域 U_α，它与 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中某开集同胚，即存在同胚映射 φ_α: $U_\alpha\to V$，其中 V 是 R^n 中开集．通常，我们称 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 为一个局部坐标系，坐标邻域，或坐标卡．对于任意点 $p\in U_\alpha$，有 $\varphi_\alpha(p)\in V\subset R^n$．$\varphi_\alpha(p)$ 在 R^n 中的坐标 $(x_1, \cdots, x_n)$ 叫做流形 M 上点 p 的局部坐标，或点 p 在 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 中的坐标．

流形上点的局部坐标并不总是唯一确定的，因为同一点可同时属于不同的坐标邻域．设 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$(U_\beta,\varphi_\beta)$ 是 M 上二坐标邻域，若 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$，便有 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$: $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ （R^n 中开集到 R^n 中开集的同胚映射）属于 $C^k(C^\infty)$ 类，则称上述二坐标邻域是 $C^k(C^\infty)$ 匹配（或相容）的．具体说来，设 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$，$p$ 在 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 和 (U_β, φ_β) 中的局部坐标分别为 $(x_1, \cdots, x_n)$ 和 $(y_1, \cdots, y_n)$，则映射 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 的分量表示为

$$\begin{cases} y_1=y_1(x_1, \cdots, x_n), \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_n=y_n(x_1, \cdots, x_n), \end{cases} \tag{5.1.1}$$

部映射 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 实际上是 p 点相对于不同局部坐标系的局部坐标之间的变换，而 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 与 (U_β, φ_β) 之间 $C^k(C^\infty)$ 匹配，相当于要求(5.1.1)中的诸函数皆属于 $C^k(C^\infty)$ 类. 今后我们一般只用到 C^∞ 匹配.

定义 2 设 M 为拓扑流形，$\mathscr{U}=\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha\in I\}$ 是坐标邻域族，满足下列三项要求:

1° $\{U_\alpha\}$覆盖 M;

2° $\mathscr{U}$ 中任二坐标邻域 C^∞ 匹配;

3° $\mathscr{U}$ 是极大的，即与 $\mathscr{U}$ 中每个成员都匹配的(U, φ)本身亦必属于族 $\mathscr{U}$.

我们称这样的坐标邻域族 $\mathscr{U}$ 是 M 上的 C^∞ 可微结构，简称可微结构或光滑结构.

定义 3 一拓扑流形，附加上一个 C^∞ 可微结构，称为 C^∞ 微分流形，简称微分流形或光滑流形.

5.1.3 可微函数与可微映射

设 M 是 n 维 C^∞ 微分流形. $G\subset M$ 是一开集. $f: G\to R$ 是 G 上的实值函数. $\mathscr{U}=\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$是 M 上的 C^∞ 可微结构.

定义 1 设 $p\in G\cap U_\alpha$. 若 $f\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 在 $\varphi_\alpha(p)$处可微，则称 f 在 p 点是可微的. 若 $f\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 在 $\varphi_\alpha(p)$是 C^∞ 的，就称 f 在 p 点为 C^∞ 可微.

若 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$，则由于 $f\circ\varphi_\beta^{-1}=f\circ\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$，可见 f 在 p 点的可微性与坐标邻域的选择无关. 由此亦可领悟到当初定义可微结构时何以提出 C^∞ 匹配那样的要求.

更普遍一些，我们可以定义从微分流形到微分流形的映射的可微性. 设 M 和 N 为二微分流形，它们的可微结构分别为 $\mathscr{U}=\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 和 $\mathscr{V}=\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$. $f: M\to N$ 为连续映射. 给定 $p\in M$，设 $f(p)\in V_\beta$. 因为 f 连续，故在 M 中存在 p 点之开邻域 G，致 $f(G)\subset V_\beta$. 此外，存在 U_α, $p\in U_\alpha$. 所谓 f 在 p 点的一个邻域中 C^∞ 可微是指：若存在开集 H，使 $p\in H$, $H\subset G\cap U_\alpha$ 且

$$\psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(H)\to\psi_\beta(V_\beta)$$

是 C^∞ 可微的. 由可微结构的 C^∞ 匹配性，可知此种可微性亦与坐标邻域的选取无涉.

利用映射的可微性，可定义微分同胚这一十分重要的概念.

定义 2 设 M, N 皆为 C^∞ 流形. F: $M\to N$ 为流形间的映射，若 ① F 是 C^∞ 映射; ② F 是(拓扑)同胚; ③ F^{-1} 是 C^∞ 映射，则称 F 是从 M 到 N 的微分同胚映射，并且称 M 微分同胚于 N，记为 $M\approx N$.

§5.2 流形上的向量场

5.2.1 切空间与切向量场

设 M 是 n 维 C^∞ 流形(以下简称流形). 考虑一切定义域包含 p 点之某邻域的 C^∞ 函数. 引进等价关系：在 p 点的一邻域上吻合的二函数视为等价. 如此获得的等价类之集记为 $C^\infty(p)$. 设 $U\subset M$ 为 M 之开集，记 $C^\infty(U)=\bigcup\limits_{p\in U}C^\infty(p)$; 它是 R 上的一个可换代数.

定义 设映射 X_p: $C^\infty(p)\to R$ 满足下列条件:

1° $X_p(\alpha f+\beta g)=\alpha X_pf+\beta X_pg$(线性);

2° $X_p(fg)=(X_pf)g(p)+f(p)(X_pg)$(莱布尼兹法则)，

其中 α, $\beta\in R$, f, $g\in C^\infty(p)$. 这样的映射 X_p 称为流形 M 在 p 点处的一个切向量. p 点处切向量之全体称为流形 M 在 p 点处的切空间，通常记为 $T_p(M)$.

并集 $\bigcup\limits_{p\in M}T_p(M)$ 附以适当的流形结构称为流形 M 的切丛，记为 $T(M)$ 或 TM. 所谓流形 M 上的一个向量场 X，是由 M 到 $T(M)$ 的一个映射: 对每个 $p\in M$，有一切向量 $X_p\in T_p(M)$ 与之对应.

设 X 为 M 上的向量场，$f\in C^\infty(M)$. 约定以 Xf 表示由下式定义的函数:

$$Xf(p)=X_p(f),$$
其中 X_p 是向量场 X 在 p 点的"取值".

5.2.2 流形间映射的微分

设 $F: M\to N$ 是流形间的 C^∞ 映射, $p\in M$, $f\in C^\infty(F(p))$. 由关系

$$F_*(X_p)f=X_p(f\circ F) \tag{5.2.1}$$

所定义的映射 F_*: $T_p(M)\to T_{F(p)}(N)$ 是切空间之间的同态映射. F_* 称为映射 F 的微分, 亦可记为 dF, DF 或 F'. 当 F: $M\to N$ 是恒等映射时, F_* 是恒等同构. 又, 若 $H=G\circ F$ 表示二 C^∞ 映射之复合, 则

$$H_*=(G\circ F)_*=G_*\circ F_*. \tag{5.2.2}$$

设 $U\subset N$ 为 N 之开集, $p\in M$. 如果 F: $M\to U$ 是微分同胚, 则 F_*: $T_p(M)\to T_{F(p)}(N)$ 为同构映射.

5.2.3 向量场的局部坐标表示

设 (U, φ) 是 M 上的一坐标邻域, $p\in U$. 由 φ^{-1} 可诱导出映射 φ_*^{-1}: $T_{\varphi(p)}(R^n)\to T_p(M)$. 在点 $\varphi(p)\in\varphi(U)\subset R^n$ 处, $T_{\varphi(p)}(R^n)$ 有自然基

$$\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n;$$

它们在映射 φ_*^{-1} 之下的象

$$E_{1p}=\varphi_*^{-1}(\partial/\partial x_1), \cdots, E_{np}=\varphi_*^{-1}(\partial/\partial x_n)$$

是 $T_p(M)$ 的一组基, 叫做 $T_p(M)$ 的坐标标架. 由此导出向量场 X 在局部坐标系中的表示为

$$X=\sum_{i=1}^{n}a^i(x)E_{ip}. \tag{5.2.3}$$

注意到 $$E_{ip}f=\varphi_*^{-1}(\partial/\partial x_i)f=\frac{\partial}{\partial x_i}(f\circ\varphi^{-1}),$$

故不妨将(5.2.3)简记为

$$X=\sum_{i=1}^{n}a^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}; \tag{5.2.4}$$

(5.2.4)式右方作用于函数 f，应理解为作用在 f 的局部坐标表示 $f\circ\varphi^{-1}$ 之上. 此外，我们总假定诸 $a^i(x)$ 是 C^∞ 函数，这样的向量场称为 C^∞ 向量场.

§5.3 微分形式与外微分

5.3.1 对偶向量场

在§5.2中，我们介绍了切丛 $T(M)$ 的概念，它是更一般的向量丛的一种特殊情形. 对于切丛，若 $x_p\in T_p(M)\subset T(M)$，令 $\pi(x_p)=p$，由此定义的映射 $\pi: T(M)\to M$ 称为由切丛 $T(M)$ 到底流形 M 的投影映射，而 $\pi^{-1}(p)=T_p(M)$ 则称为 p 点处的纤维. 所谓向量场实际上是在每点 $p\in M$ 处取该点纤维 $\pi^{-1}(p)$ 中之一元素与之对应；准此，向量场又称作是向量丛的一个截面(section).

倘若在每点 p 处不是用 $T_p(M)$ 而是用另外的某个向量空间作为纤维 $\pi^{-1}(p)$，这些新的向量空间之并附以一定的流形结构便构成了底流形 M 上一个新的向量丛.

最简单的情形是用向量空间 $T_p(M)$ 的对偶向量空间 $T_p^*(M)$ 作为这样的纤维 $\pi^{-1}(p)$. $T_p^*(M)$ 称为 M 在 p 点的对偶切空间或余切空间. $T_p^*(M)$ 的元素称为对偶切向量，或简称对偶向量. M 上一切对偶切空间之并 $T^*(M)=\bigcup\limits_{p\in M}T_p^*(M)$ 叫做 M 的对偶切丛或余切丛. 对偶切丛的一个截面，即映射

$$\omega:\ M\to T^*(M),$$
$$p\mapsto\omega_p\in T_p^*(M)$$

称为 M 上的对偶向量场. 对偶向量场又称1形式. 若 $U\subset M$ 上有向量场 X，并设 σ 是 M 上对偶向量场，则可定义函数 $\sigma(X)$: $U\to R(p\mapsto\sigma_p(X_p))$. 今设 (U,φ) 为 M 的坐标邻域，相应的自然标架场为 $E_1,\cdots,E_n$，如果诸函数 $\sigma(E_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ 是 U 上的 C^∞ 函数，则称 σ 是 C^∞ 对偶向量场. 后面提到的都是 C^∞ 对偶向量场.

设 f: $M\to R$ 是一个 C^∞ 函数，按照

$$(df)_p(X_p)=X_pf \tag{5.3.1}$$

定义了一个 C^∞ 对偶向量场 df. 这个对偶向量场称为函数 f 的微分，它在 p 点的"值"$(df)_p$ 叫做 f 在 p 点的微分. 在开集 $U\subset R^n$ 的情形，此定义恰好与传统的微分概念一致.

设 $x_1, \cdots, x_n$ 是流形 M 上点的局部坐标，它们(作为 M 上点的函数)的微分 $dx_1, \cdots, dx_n$ 正好是对偶于 $\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n$ 的对偶标架. 于是，我们有 1 形式的局部坐标表示：

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\,dx_i, \tag{5.3.2}$$

其中诸 $\alpha_i(x)$ 是 C^∞ 函数.

已知流形间映射 F: $M\to N$, 前面由(5.2.1)式曾经定义了映射 F_*: $T_p(M)\to T_{F(p)}(M)$. 今设 $\sigma_{F(p)}\in T^*_{F(p)}(N)$, $X_p\in T_p(M)$, 则由

$$F^*(\sigma_{F(p)})(X_p)=\sigma_{F(p)}(F_*(X_p)) \tag{5.3.3}$$

诱导出映射

$$F^*: T^*_{F(p)}(N)\to T^*_p(M). \tag{5.3.4}$$

一般说来，F_* 并不见得将 M 上的向量场映射成 N 上的向量场. 但值得注意的是：对于给定的 N 上任何 C^∞ 对偶向量场 ω', $F^*(\omega')$ 必定是 M 上的对偶向量场. 设

$$\omega'=\sum_{k=1}^{m}\alpha'_k dx'_k,$$

则

$$F^*(\omega')=\sum_{i,k}\alpha'_k\frac{\partial x'_k}{\partial x_i}dx_i. \tag{5.3.5}$$

此外，显然有

$$(F_1\circ F_2)^*=F_2^*\circ F_1^*. \tag{5.3.6}$$

5.3.2 张量场

更一般的情形有所谓张量场. 设 V 为线性空间，V^* 为 V 的对偶空间. 重线性映射

$$\Phi: \underbrace{V\times\cdots\times V}_{r\text{个}}\times\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{s\text{个}}\to R$$

称为 V 上的一个张量，r 称为此张量的协变(共变)级，s 称为此张量的逆变(反变)级．对于固定的 r 和 s，一切 Φ 之集，按自然方式引入线性运算，将形成一 n^{r+s} 维向量空间(n 是向量空间 V 的维数)．当 $s=0$ 时，对应的张量称为 r 级协变张量．一切 r 级协变张量构成的线性空间记为 $\mathscr{T}^r(V)$．张量概念可以注入于流形的讨论之中，其要点在于以流形上每点处之切空间作为刚才定义张量的线性空间 V．所谓流形 M 上一 r 级协变张量场，是这样一个映射 Φ：对每个点 $p\in M$，取张量 $\Phi_p\in\mathscr{T}^r(T_p(M))$ 与之对应．设 $X_1, \cdots, X_r$ 是开集 $U\subset M$ 上 r 个任意向量场，若 $\Phi(X_1, \cdots, X_r)$ 是 U 上的 C^∞ 函数，这样的张量场 Φ 称为 C^∞ 的 r 级协变张量场．M 上一切 C^∞ 的 r 级协变张量场之集记为 $\mathscr{T}^r(M)$．

r 级协变张量场包含了很丰富的内容．当 $r=1$ 时，即前述的对偶向量场．当 $r=2$ 时，即所谓双线性形式场，这种场具有特殊的重要性．我们知道，若流形上定义了一个对称、正定的双线性形式场 Φ，此流形称为*黎曼流形*，而这个 Φ 便是所谓的*黎曼度量*．

设 V 是线性空间，$\varphi\in\mathscr{T}^r(V)$，$\psi\in\mathscr{T}^s(V)$．张量 φ 与 ψ 的乘积是一个 $r+s$ 级协变张量，记为 $\varphi\otimes\psi$，定义如下：

$$\begin{aligned}&\varphi\otimes\psi(V_1, \cdots, V_r; V_{r+1}, \cdots, V_{r+s})\\&=\varphi(V_1, \cdots, V_r)\psi(V_{r+1}, \cdots, V_{r+s}).\end{aligned}\tag{5.3.7}$$

在张量乘法的基础上可以定义流形上张量场的乘法．设 $\varphi\in\mathscr{T}^r(M)$，$\psi\in\mathscr{T}^s(M)$(即 φ, ψ 分别为 r 级，s 级协变张量场)，$\varphi\otimes\psi$ 可逐点定义：$(\varphi\otimes\psi)_p=\varphi_p\otimes\psi_p$．于是，$M$ 上 r 级协变量张量场与 s 级协变张量场之积是 M 上一 $r+s$ 级协变张量场．

5.3.3 流形上的外代数

以下我们最感兴趣的是所谓反对称协变张量．设 σ 是 $(1, \cdots, r)$ 的一个排列：

$$(1, \cdots, r)\to(\sigma(1), \cdots, \sigma(r)).$$

若 σ 能表示成偶数个对换的积，规定 $\operatorname{sgn}\sigma=+1$；若 σ 能表示成奇数个对换的积，规定 $\operatorname{sgn}\sigma=-1$. 对于每个向量组 $V_1, \cdots, V_r$ 及每一排列 σ，若有

$$\Phi(V_1, \cdots, V_r)=\Phi(V_{\sigma(1)}, \cdots, V_{\sigma(r)}),$$

则张量 Φ 称为对称的；若有

$$\Phi(V_1, \cdots, V_r)=\operatorname{sgn}\sigma\Phi(V_{\sigma(1)}, \cdots, V_{\sigma(r)}),$$

则张量 Φ 称为反对称的. 反对称协变张量称为外形式. $\mathscr{T}^r(V)$ 中所有反对称协变张量的集记为 $\Lambda^r(V)$，它是 $\mathscr{T}^r(V)$ 的一个子空间.

考虑由

$$(\mathscr{A}\Phi)(V_1, \cdots, V_r)=\frac{1}{r!}\sum\operatorname{sgn}\sigma\Phi(V_{\sigma(1)}, \cdots, V_{\sigma(r)})$$

定义的映射[注]

$$\mathscr{A}:\ \mathscr{T}^r(V)\to\mathscr{T}^r(V).$$

显然，对任何张量 $\Phi\in\mathscr{T}^r(V)$，$\mathscr{A}\Phi$ 总是反对称的. 故映射 $\mathscr{A}$ 称为反对称化变换. 易知

$$\mathscr{A}(\mathscr{T}^r(V))=\Lambda^r(V).$$

记 $\mathscr{T}^0(V)=R$. 考虑 $\mathscr{T}^0(V)$, $\mathscr{T}^1(V)$, $\cdots$, $\mathscr{T}^r(V)$, $\cdots\cdots$ 的直和：

$$\mathscr{T}(V)=\mathscr{T}^0(V)\oplus\mathscr{T}^1(V)\oplus\cdots\oplus\mathscr{T}^r(V)\oplus\cdots\cdots,$$

任何 $\tilde{\varphi}\in\mathscr{T}(V)$，可唯一地表示为

$$\tilde{\varphi}=\varphi_1^{i_1}+\cdots+\varphi_n^{i_n},$$

其中
$$\varphi_j^{i_j}\in\mathscr{T}^{i_j}(V),\ i_1<i_2<\cdots<i_n.$$

如此所定义的 $\mathscr{T}(V)$，是由 $\mathscr{T}^0(V)$ 和 $\mathscr{T}^1(V)$ 生成的 R 上的结合代数.

另一方面，显然有 $\Lambda^1(V)=\mathscr{T}^1(V)$. 当 $r>1$ 时，$\Lambda^r(V)$ 是 $\mathscr{T}^r(V)$ 的真子空间. 又，规定 $\Lambda^0(V)=R$. 我们可仿照 $\mathscr{T}(V)$ 之定义，规定

［注］ 算子 $\mathscr{A}$ 亦可记为 $\mathscr{A}$lt，源出 alternating 一词. 此处讨论仅涉及域 R 上的向量空间，alternating 与 skew-symmetric 等价. 对于具有性质 $1+1=0$ 的域上之向量空间，则前者强于后者.

$$\Lambda(V)=\Lambda^0(V)\oplus\Lambda^1(V)\oplus\cdots\oplus\Lambda^r(V)\oplus\cdots\cdots.$$

如此定义的 $\Lambda(V)$ 是 $\mathscr{T}(V)$ 的子空间，但不是一个子代数，这是由于对于任意的 $\varphi\in\Lambda^r(V)$，$\psi\in\Lambda^s(V)$，它们的张量积 $\varphi\otimes\psi$ 可能不属于 $\Lambda^{r+s}(V)$. 因此特规定反对称协变张量的外乘法. 设 $\varphi\in\Lambda^r(V)$，$\psi\in\Lambda^s(V)$，φ 与 ψ 的外积，记为 $\varphi\wedge\psi$，由下式定义：

$$\varphi\wedge\psi=\frac{(r+s)!}{r!s!}\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi). \tag{5.3.8}$$

运算 Λ 是双线性的：

$$(\omega_1+\omega_2)\wedge\eta=\omega_1\wedge\eta+\omega_2\wedge\eta, \tag{5.3.9}$$

$$\omega\wedge(\eta_1+\eta_2)=\omega\wedge\eta_1+\omega\wedge\eta_2, \tag{5.3.10}$$

$$(a\omega)\wedge\eta=\omega\wedge(a\eta)=a(\omega\wedge\eta). \tag{5.3.11}$$

运算 Λ 是"反交换"的：

$$\omega\wedge\eta=(-1)^{rs}\eta\wedge\omega, \tag{5.3.12}$$

其中 $\qquad \omega\in\Lambda^r(V),\ \eta\in\Lambda^s(V).$

运算 Λ 还是结合的：

$$(\omega\wedge\eta)\wedge\theta=\omega\wedge(\eta\wedge\theta)=\frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}\mathscr{A}(\omega\otimes\eta\otimes\theta), \tag{5.3.13}$$

其中 $\qquad \omega\in\Lambda^k(V),\ \eta\in\Lambda^l(V),\ \theta\in\Lambda^m(V).$

设 $\varphi,\ \psi\in\Lambda(V)$，

$$\varphi=\varphi_1+\cdots+\varphi_k,\ \varphi_i\in\Lambda^{r_i}(V),\ i=1,\ \cdots,\ k,$$

$$\psi=\psi_1+\cdots+\psi_l,\ \psi_j\in\Lambda^{s_j}(V),\ j=1,\ \cdots,\ l.$$

φ 与 ψ 的外积规定为

$$\varphi\wedge\psi=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\varphi_i\wedge\psi_j. \tag{5.3.14}$$

在 $\Lambda(V)$ 中附上(5.3.14)式所规定的外乘法运算，是 R 上一结合代数，仍记为 $\Lambda(V)$. 这个代数称为外代数或 Grassmann 代数.

显然，上述一切讨论皆可移植于流形 M 上的反对称协变张量场. M 上一个 r 级反对称协变张量场称为 r 级外微分形式，简称 r 形式. M 上的 C^∞ 函数称为 0 形式. M 上 r 形式的全体记为 $\Lambda^r(M)$. 与产生 $\Lambda(V)$ 的过程类似，可引出 $\Lambda(M)$. $\Lambda(M)$ 称为

流形 M 上的外代数，或外微分形式的代数.

若 $\omega^1, \cdots, \omega^n$ 是 $\Lambda^1(M)$ 的一组基，则

$$\{\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r} \mid 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant n\}$$

是 $\Lambda^r(M)$ 的一组基. 设 (U, φ) 是坐标邻域，$x_i(i=1, \cdots, n)$ 是 $q\in U$ 的局部坐标，即 $\varphi(q)=(x_1(q), \cdots, x_n(q))$. 诸 x_i(作为 U 上点的函数)的微分 $dx_1, \cdots, dx_n$ 形成 $\Lambda^1(U)$ 的对偶标架场. 于是，r 形式 $\omega^{(r)}$ 的局部坐标表示为

$$\omega^{(r)}=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\alpha_{i_1\cdots i_r}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}, \tag{5.3.15}$$

其中诸 $\alpha_{i_1\cdots i_r}$ 是 M 上的 C^∞ 函数.

若给定 r 个 1 形式

$$\phi_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\,dx_j,\ i=1, \cdots, r, \tag{5.3.16}$$

则有

$$\phi_1\wedge\cdots\wedge\phi_r=\sum\det(\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_r})dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}, \tag{5.3.17}$$

其中 $\det(\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_r})$ 表示矩阵 (α_{ij}) 中标号为 $i_1, \cdots, i_r$ 的诸列所构成的行列式，特别是当 $r=n$ 时有

$$\phi_1\wedge\cdots\wedge\phi_n=\det(\alpha_{ij})dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n. \tag{5.3.18}$$

当矩阵 (α_{ij}) 的秩为 r 时，则 1 形式组 $\phi_1, \cdots, \phi_r$ 是线性无关的. 由(5.3.17)式可知：1 形式组 $\phi_1, \cdots, \phi_r$ 线性无关的充要条件是

$$\phi_1\wedge\cdots\wedge\phi_r\neq 0. \tag{5.3.19}$$

最后，回顾一下 F^* 的定义(见(5.3.3)、(5.3.4)二式)，不难看出它可以推广到 r 形式之间的映射：

$$F^*(\sum\alpha'_{k_1\cdots k_r}dx'_{k_1}\wedge\cdots\wedge dx'_{k_r})$$
$$=\sum\alpha'_{k_1\cdots k_r}\frac{\partial x'_{k_1}}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial x'_{k_r}}{\partial x_{i_r}}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}. \tag{5.3.20}$$

特别是当 $\dim N=\dim M=n$ 且设 ω'_n 是 N 上一 n 形式，则

$$F^*\omega'_n=|J|\omega_n=(\det F_*)\omega_n, \tag{5.3.21}$$

其中 $|J|$ 表示雅可比阵 $J=(\partial x'_k/\partial x_i)$ 的行列式. 此外，对于(5.3.20)式所定义的映射，有下列性质：

$$(G\circ F)^* = F^*\circ G^*, \tag{5.3.22}$$

$$F^*(\omega\wedge\phi) = F^*(\omega)\wedge F^*(\phi). \tag{5.3.23}$$

5.3.4 外微分

如前，设 M 为任意的 n 维微分流形，$\Lambda(M)$ 表示 M 上的外代数. 可以证明，必存在唯一的线性映射

$$d_M:\ \Lambda(M)\to\Lambda(M),$$

d_M 满足下述条件：

1° 若 $f\in\Lambda^0(M)$，则 $d_M f = df$（右方 df 表示 f 的微分）；

2° 若 $\omega^{(q)}\in\Lambda^q(M)$，$\omega^{(s)}\in\Lambda^s(M)$，则

$$d_M(\omega^{(q)}\wedge\omega^{(s)}) = d_M\omega^{(q)}\wedge\omega^{(s)} + (-1)^q\omega^{(q)}\wedge d_M\omega^{(s)}; \tag{5.3.24}$$

3° $$d_M^2 = 0. \tag{5.3.25}$$

在不致引起混淆的情况下，今后将算子 d_M 简记为 d. $d\omega^{(r)}$ 称为 r 形式 $\omega^{(r)}$ 的外导数或外微分. 若 $\omega^{(r)}$ 由(5.3.15)式给出，则

$$\begin{aligned} d\omega^{(r)} &= \sum_i d\alpha_{i_1\cdots i_r}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r} \\ &= \sum_{i,k}\frac{\partial\alpha_{i_1\cdots i_r}}{\partial x_k}\,dx_k\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}, \end{aligned} \tag{5.3.26}$$

后一和式对一切 $i_1<\cdots<i_r$ 及 $1\leqslant k\leqslant n$ 求和.

设 X, Y 是 M 上二向量场，规定 $[X, Y] = XY - YX$，它是由下式赋义的一个向量场：

$$(XY-YX)_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf),\ f\in C^\infty(p). \tag{5.3.27}$$

仍以 $\omega^{(r)}$ 表示 r 形式，则对任意一组向量场 $X_1, \cdots, X_{r+1}$，可以证明下式成立：

$$\begin{aligned} &d\omega^{(r)}(X_1, \cdots, X_{r+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}X_i(\omega^{(r)}(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_{r+1})) \\ &\quad + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant r+1}(-1)^{i+j}\omega^{(r)}([X_i, X_j], X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \\ &\quad \hat{X}_j, \cdots, X_{r+1}), \end{aligned} \tag{5.3.28}$$

其中记号 $\hat{X}_i$ 表示 X_i 不出现，此式亦可作为算子 d 的定义．我们来看此式的一个特款．设 ω 表示 1 形式，X, Y 为任意的二向量场，则此时(5.3.28)给出：

$$d\omega(X, Y)=X(\omega(Y))-Y(\omega(X))-\omega([X, Y]). \tag{5.3.29}$$

另外，映射 F^* 与算子 d 是可换的，即

$$F^*(d\omega)=d(F^*\omega). \tag{5.3.30}$$

5.3.5 用通常的微分表示外微分

现在我们来介绍一个用通常的微分表示外微分的表达式．

我们知道在平面上两个微分 dx 与 dy 的外积，其实就是二重积分的被积表达式，亦即 $dx\wedge dy$ 可以理解为平面上(带符号的)面积元．为了找出平面面积元的更普遍的表达式，我们可设想从点(x, y)出发作两次位移，得到两个线性无关的无穷小向量(dx, dy)和$(\delta x, \delta y)$．由此可见平面面积元应为

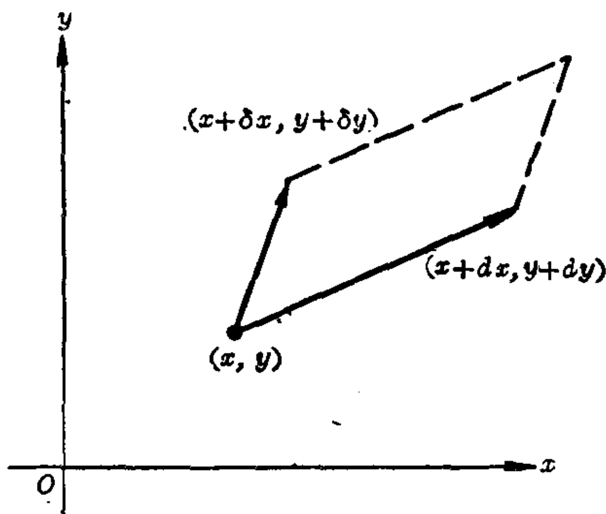


图 5-1

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x+dx & y+dy & 1 \\ x+\delta x & y+\delta y & 1 \end{vmatrix}=dx\,\delta y-\delta x\,dy, \tag{5.3.31}$$

这便是所求的平面上面积元的普遍表达式．我们来看两个特款．若取坐标轴的方向作为位移的方向($dx=dx$, $dy=0$; $\delta x=0$, $\delta y=dy$)，则面积元(5.3.31)呈现通常直角坐标下面积元之形式 $dx\,dy$．又若分别取极径 ρ 的方向和垂直于极径的方向作为两次位移的方向，从而

$$dx=\cos\theta\,d\rho,\ dy=\sin\theta\,d\rho,$$

$$\delta x=-\rho\sin\theta\,d\theta,\ \delta y=\rho\cos\theta\,d\theta,$$

这时(5.3.31)式给出 $\rho\,d\rho\,d\theta$，即极坐标系下的面积元.

既然(5.3.31)式是平面上面积元的一般表达式，我们可取它作为 dx 与 dy 外积的定义[注]:

$$dx\wedge dy=dx\,\delta y-\delta x\,dy. \tag{5.3.32}$$

设有二1形式 $\omega_1=\sum_i a_i dx_i$ 和 $\omega_2=\sum_j b_j dx_j$. 由(5.3.32)式有

$$\omega_1\wedge\omega_2=\sum_{i,j}a_ib_j\,dx_i\wedge dx_j=\sum_{i,j}a_ib_j(dx_i\delta x_j-\delta x_i dx_j).$$

记 $\omega_1(d)=\sum a_i\,dx_i$ 和 $\omega_1(\delta)=\sum a_i\,\delta x_i$, $\omega_2(d)$, $\omega_2(\delta)$ 的意义类似. 于是有

$$\omega_1\wedge\omega_2=\omega_1(d)\omega_2(\delta)-\omega_1(\delta)\omega_2(d). \tag{5.3.33}$$

设 $\omega=\sum_i\alpha_i dx_i$. 利用(5.3.32)式，有

$$\begin{aligned}d\omega&=\sum_{i,k}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_k}\,dx_k\wedge dx_i\\&=\sum_{i,k}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_k}(dx_k\,\delta x_i-\delta x_k\,dx_i).\end{aligned} \tag{5.3.34}$$

援引刚才的记号,

$$\omega(\delta)=\sum_i\alpha_i\,\delta x_i,\ \omega(d)=\sum_i\alpha_i\,dx_i,$$

则有

$$\begin{aligned}d\omega(\delta)&=\sum_i d\alpha_i\,\delta x_i+\sum_i\alpha_i\,d(\delta x_i)\\&=\sum_{i,k}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_k}\,dx_k\,\delta x_i+\sum_i\alpha_i\,d(\delta x_i),\\\delta\omega(d)&=\sum_i\delta\alpha_i\,dx_i+\sum_i\alpha_i\,\delta(dx_i)\\&=\sum_{i,k}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_k}\,\delta x_k\,dx_i+\sum_i\alpha_i\,\delta(dx_i).\end{aligned}$$

上二式相减，并注意到 $d(\delta x_i)=\delta(dx_i)$(混合偏导数与次序无关)，有

$$d\omega(\delta)-\delta\omega(d)=\sum_{i,k}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_k}(dx_k\,\delta x_i-\delta x_k\,dx_i).$$

[注] 例如，见 E. Cartan, Léçons sur les invariants intégraux, Paris, 1922. 或 П. К. Рашевский, Геометрическая Теория Уравнений с Частными Производными, М. -Л., 1947.

再利用(5.3.34)式，最后得到

$$d\omega=d\omega(\delta)-\delta\omega(d). \qquad (5.3.35)$$

应当提醒一下：上式左方的 d 表示外微分运算，而右方的 d 和 δ 表示通常的微分运算。

§5.4 积分流形与 Pfaff 方程

5.4.1 积分流形

分布和积分流形概念，是通常 R^2 中向量场和积分曲线概念的自然推广．但当推广到一般情形（M 上 C^∞ k 维分布及其完全可积性），呈现出较为复杂的方面．

定义 1 设 M 是 $n=m+k$ 维流形．假定对每点 $p\in M$，$T_p(M)$ 的一个 m 维线性子空间 Δ_p 与之对应，又设在每点 $p\in M$ 的某个邻域 U 内，存在着 m 个线性无关的 C^∞ 向量场 $X_1, \cdots, X_m$，使得对于每点 $q\in U$ 这些向量场在该点的取值 $X_{1_q}, \cdots, X_{m_q}$ 构成 Δ_q 的一组基．我们称这样的 Δ 是 M 上的一个 $C^\infty m$ 维分布，而 $X_1, \cdots, X_m$ 称为 Δ 的局部基．

定义 2 给定 M 上的分布 Δ，假定在每点之一邻域存在一局部基 $X_1, \cdots, X_m$，致

$$[X_i, X_j]=\sum_{k=1}^{m} C_{ij}^k X_k, \ 1\leqslant i, j\leqslant m, \qquad (5.4.1)$$

则称此 Δ 是对合分布(involutive distribution)．其中 C_{ij}^k 一般不是常数，而是该邻域上的 C^∞ 函数．

定义 3 设 Δ 是 M 上 C^∞ 分布，N 是连通的 C^∞ 流形，而 $F: N\to M$ 是一对一浸入使得对于每点 $q\in N$ 有 $F_*(T_q(N))\subset\Delta_{F(q)}$，则称该浸入子流形是 Δ 的积分流形．

注 1 稍稍特殊一点的说法是，设 $N\subset M$ 为 M 的子流形，并以包含映射 i 代替定义中的映射 F．

注 2 按此处所述定义，积分流形的维数可以低于 Δ 的维数．

设 M 是 $n=m+k$ 维流形，Δ 是 M 上 $C^\infty m$ 维分布．若对于

每点 $p\in M$，有坐标邻域(U,φ)（以 $x^1,\cdots,x^n$ 表示局部坐标），使得m个向量 $E_i=\varphi_*^{-1}(\partial/\partial x^i)$ $(i=1,\cdots,m)$是 Δ 在 U 上的一个局部基，则称分布 Δ 是完全可积的. 注意，在此情形下，过 U 的每点 q 必有一m 维积分流形 N 致 $i_*(T_q(N))=\Delta_q$，简言之，N 的切空间正好是 Δ. 事实上，若$(a^1,\cdots,a^n)$表示 q 点的坐标，那么，局部坐标满足关系

$$x^{m+1}=a^{m+1},\ \cdots,\ x^n=a^n$$

的一切点之集，即

$$N=\varphi^{-1}\{x\in\varphi(U)\,|\,x^j=a^j,\ j=m+1,\ \cdots,\ n\},$$

其切空间由 $\varphi_*^{-1}(\partial/\partial x^1),\cdots,\varphi_*^{-1}(\partial/\partial x^m)$所张成，是过 q 点的一积分流形. 在这种情况下，因为

$$[E_i,\ E_j]=\varphi_*^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right]=0,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant m, \quad (5.4.2)$$

所以分布 Δ 是对合的. 这就是说，完全可积的分布必定是对合的.

然而，绝大多数分布不是对合的. 例如，在 R^3 上由

$$X_1=x^3\ \frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{\partial}{\partial x^3},\ X_2=\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x^3}$$

张成的分布便不是对合的. 事实上，$[X_1,\ X_2]=-\partial/\partial x^1$ 不能表示成 X_1, X_2 的线性组合.

刚才提过，Δ 的对合性是 Δ 为完全可积的必要条件. 我们很自然地要问：Δ 的对合性是不是其完全可积的充分条件？答案是肯定的. 事实上，有下列结论：

定理(Frobenius) 流形 M 上的分布 Δ 为完全可积的充要条件是 Δ 为对合分布.

定理的充分性部分证明较繁，从略.

5.4.2 Pfaff 方程组

设 M 是 n 维微分流形，ω 是 M 上1形式. 方程 $\omega=0$ 称为 Pfaff 方程. 若存在 M 上的向量场 X 致 $\omega X=0$，即对于每点 $p\in M$ 有 $\omega_p(X_p)=0$，则称向量场 X 是 Pfaff 方程 $\omega=0$ 的解.

一般地说，设 $\omega_1, \cdots, \omega_r$ 是 M 上 r 个 1 形式，则方程组

$$\omega_1=0, \cdots, \omega_r=0 \tag{5.4.3}$$

称为 Pfaff 方程组．与一个方程的情形类似，可规定 Pfaff 方程组的解的含义．

设有二 Pfaff 方程组 $\omega_i=0(i=1, \cdots, r)$ 与 $\phi_j=0(j=1, \cdots, m)$，若存在 C^∞ 函数 λ_{ij}, μ_{ij} 致

$$\omega_i=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}\phi_j, \ \phi_j=\sum_{i=1}^{r}\mu_{ij}\omega_i, \tag{5.4.4}$$

则称此二 Pfaff 组是等价的．如果 $\omega_i(i=1, \cdots, r)$ 和 $\phi_j(j=1,\cdots, m)$ 都是线性无关的，那么，仅当 $m=r$ 且 (μ_{ij}) 是 (λ_{ji}) 的逆阵时，才会有(5.4.4)式．

设诸 1 形式 ω_i 的局部坐标表示为

$$\omega_i=\sum_k \alpha_{ik}\, dx_k, \ i=1, \cdots, r. \tag{5.4.5}$$

注意到
$$dx_k(\partial/\partial x_j)=\frac{\partial x_k}{\partial x_j},$$

则可见向量场

$$X=\sum_j a^j(\partial/\partial x_j) \tag{5.4.6}$$

是 Pfaff 组(5.4.3)的解的充要条件是

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}a^k=0, \ i=1, \cdots, r. \tag{5.4.7}$$

今考虑由(5.4.5)式给出的 r 个 1 形式，并设 $\omega_1, \cdots, \omega_r$ 线性无关，在 M 上每点处均有 $\operatorname{rank}(\alpha_{ik})=r$．对每点 $p\in M$，其分量 a^j 满足关系(5.4.7)的切向量 X_p 的全体，构成 $T_p(M)$ 的一个 $n-r$ 维线性子空间 Δ_p(n 维向量，有 r 个约束(5.4.7))．于是，与 Pfaff 组(5.4.3)相伴随就有一个 M 上的 $n-r$ 维分布 Δ．这个分布 Δ 的积分流形亦称为 Pfaff 组(5.4.3)的积分流形，并用此分布 Δ 的完全可积性来定义 Pfaff 组(5.4.3)的完全可积性．当然，Pfaff 组的完全可积性亦可直接定义：如果在 M(或 M 的某开集)上存在 r 个函数 $y_i(x_1, \cdots, x_n)$ (x_i 是 M 上点的局部坐标)，$i=1,\cdots,r$，使得 Pfaff 组(5.4.3)等价于方程组

$$dy_1=0,\ \cdots,\ dy_r=0, \tag{5.4.8}$$

或者换言之，存在 r 个函数 $y_i(i=1,\ \cdots,\ r)$ 使得

$$\omega_i=\sum_{k=1}^{r} a_{ik}\,dy_k,\ i=1,\ \cdots,\ r, \tag{5.4.9}$$

则称 Pfaff 组(5.4.3)是完全可积的.

现在我们来介绍 Frobenius 定理的另一形式，即借助于微分形式表述的完全可积性条件.

设 Δ 是 M 上一个 k 维分布. 以 $\mathscr{I}(\Delta)$ 表示一切具有下列性质的微分形式 ω 之集: 只要 $X_1, \cdots X_l$ 属于 Δ, 则有

$$\omega(X_1,\ \cdots,\ X_l)=0. \tag{5.4.10}$$

显然，$\mathscr{I}(\Delta)$ 是环 $A(M)$ 的一个子环. 并且易见，

当 $\omega_1,\ \omega_2\in\mathscr{I}(\Delta)$ 时，有

$$\omega_1+\omega_2\in\mathscr{I}(\Delta);$$

当 $\omega\in\mathscr{I}(\Delta)$ 时，有

$$\eta\wedge\omega\in\mathscr{I}(\Delta),\ \forall\eta\in A(M).$$

因此，$\mathscr{I}(\Delta)$ 是环 $A(M)$ 的一个理想.

就局部来说，理想 $\mathscr{I}(\Delta)$ 可视为由某 $n-k$ 个线性无关的 1 形式 $\omega^{k+1}, \cdots, \omega^n$ 所生成. 事实上，若 $X_1, \cdots, X_k$ 张成 Δ, 扩充成线性无关组 $X_1, \cdots, X_n$, 并取其对偶形式 $\omega_1, \cdots, \omega_n$. 则 $\omega_{k+1}, \cdots, \omega_n$ 生成理想 $\mathscr{I}(\Delta)$.

引理 设 Δ 是 M 上的 k 维分布. 则 Δ 是对合分布的充要条件是: 对任意 $X, Y\in\Delta$ 必有 $[X, Y]\in\Delta$.

证明 充分性. 设 $X_1, \cdots, X_k$ 张成分布 Δ. 假定引理中条件成立. 那么，由 $X_i, X_j\in\Delta$ 推知诸 $[X_i, X_j]\in\Delta$, 从而每个 $[X_i, X_j]$ 皆可表示成 $X_1, \cdots, X_k$ 的线性组合. 由对合分布之定义，这表明 Δ 是对合的.

必要性. 假定 Δ 是对合的，即设

$$[X_i,\ X_j]=\sum_{\alpha=1}^{k} C_{ij}^{\alpha}X_\alpha,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant k,$$

其中诸 C_{ij}^{α} 为 C^∞ 函数. 今设 $X, Y\in\Delta$. 于是，不妨写作

$$X=\sum_{i=1}^{k} f_i X_i,\ Y=\sum_{i=1}^{k} g_i X_i.$$

为了证明$[X, Y]$也属于Δ，只要处理形如$[f_i X_i, g_j X_j]$的诸项. 由于

$$[f_i X_i, g_j X_j]=f_i g_j [X_i, X_j]+f_i(X_i g_j)X_j-g_j(X_j f_i)X_i,$$

故从X_i, X_j及$[X_i, X_j]$均属于Δ推知$[f_i X_i, g_j X_j]$也属于Δ, 由此有$[X, Y]\in\Delta$. 证毕.

定理(Frobenius)　设Δ为流形M上的分布. Δ为完全可积的充要条件是

$$d(\mathscr{I}(\Delta))\subset\mathscr{I}(\Delta). \tag{5.4.11}$$

证明　设Δ是k维分布. 就M的每个局部来说, 我们可以选取n个1形式ω^1, $\cdots$, ω^n, 使得对于此局部范围中的每点q, ω_q^1, $\cdots$, ω_q^n是$T_q^*(M)$的一组基, 且$\mathscr{I}(\Delta)$正好由ω^{k+1}, $\cdots$, ω^n所生成. 假设X_1, $\cdots$, X_n是一组向量场致

$$\omega^i(X_j)=\delta_j^i$$

者. 由于当$j=1$, $\cdots$, k; $i=k+1$, $\cdots$, n时有$\omega^i(X_j)=0$, 故X_1, $\cdots$, X_k张成Δ. 由5.4.1所述的Frobenius定理, Δ的完全可积性等价于Δ的对合性, 即等价于存在诸C^∞函数C_{ij}^β致

$$[X_i, X_j]=\sum_{\beta=1}^{k} C_{ij}^\beta X_\beta,\ i, j=1, \cdots, k.$$

依据刚才证明的引理, 这一条件等价于当$X, Y\in\Delta$时有$[X, Y]\in\Delta$. 现在我们来证明, 后面这个条件等价于条件(5.4.11). 事实上, 若当$X, Y\in\Delta$时必有$[X, Y]\in\Delta$. 由(5.3.29)式,

$$d\omega(X, Y)=X(\omega(Y))-Y(\omega(X))-\omega([X, Y]). \tag{5.4.12}$$

对于$\omega\in\mathscr{I}(\Delta)$, 上式右方三项皆为零, 从而

$$d\omega(X, Y)=0. \tag{5.4.13}$$

此式表明$d\omega\in\mathscr{I}(\Delta)$. 而这就证明了(5.4.11)式成立. 反过来, 若假定(5.4.11)式成立, 则当$\omega\in\mathscr{I}(\Delta)$时必有$d\omega\in\mathscr{I}(\Delta)$. 从而, 当$X$, $Y\in\Delta$时应有(5.4.13)式成立. 再利用(5.4.12)式, 推

知$[X, Y]\in\Delta$

推论 Pfaff 组(5.4.3)是完全可积的充要条件是条件

$$d\omega_i\wedge\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_r=0,\ i=1,\ \cdots,\ r,\qquad(5.4.14)$$

成立.

§5.5 李群及其运动密度

5.5.1 李群

我们知道，R^n 是 C^∞ 流形，同时(关于通常的加法)又是一个 Abel 群，且其代数结构与可微结构有如下的关联：

$$(x,\ y)\mapsto x+y\,(R^n\times R^n \text{ 映到 } R^n \text{ 上})$$

和
$$x\mapsto(-x)\,(R^n \text{ 映到 } R^n \text{ 上})$$

皆是可微的. 以此为背景，引进如下的定义.

定义 设 G 是一个群，同时又是一个微分流形，且映射 $G\times G\to G((x,\ y)\mapsto xy)$ 和映射 $G\to G(x\mapsto x^{-1})$ 皆是 C^∞ 映射，则称 G 是一个*李群*(李即 Sophus Lie, 1842～1899，挪威数学家).

注 定义中要求二映射是 C^∞ 的，实际上只要假定映射$(x,\ y)\mapsto xy^{-1}$ 是 C^∞ 的已足够. 进一步讨论还表明，还可以用$(x,\ y)\mapsto xy$ 为 C^∞ 的这一条件来代替.

常见的李群，除刚才提到的 R^n 外，还可以举出不少. 例如 C^*(非零复数集)关于复数乘法是一群. 又，C^* 还可以看作是一个二维 C^∞ 流形：取 $U=C^*$，$\varphi(x+iy)=(x,\ y)$构成坐标邻域. 映射

$$((x,\ y)(x',\ y'))\mapsto(xx'-yy',\ xy'+yx')$$

和
$$(x,\ y)\mapsto\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

皆是 C^∞ 映射. 于是 C^* 是一李群. 又如，S^1 可同化于模为 1 的复数集，是 C^* 的一个子群，可以证明，S^1 是一个李群. 还可以证明，$T^n=S^1\times\cdots\times S^1$(取直积拓扑)亦构成李群，这个李群叫做*环面群*(toral group).

许多重要的李群是矩阵群. 与积分几何关系最为密切的也正

是矩阵李群.

所谓**一般线性群**(general linear group)是指一切非异 $n\times n$ 实矩阵所成之群,记为 $Gl(n, R)$ 或简记为 $Gl(n)$. 一切 $n\times n$ 实矩阵之集 $\mathscr{M}_n(R)$ 可同化于 R^{n^2}. 由于函数

$$\det\colon R^{n^2}\to R$$

是多项式映射,故连续. 从而 $Gl(n, R)=\det^{-1}(R-\{0\})$ 为开集,可赋予它 C^∞ 可微结构使之成为 R^{n^2} 的开子流形. 又 $Gl(n, R)$ 关于矩阵乘法是一群. 事实上,设 $A, B\in Gl(n, R)$, 则

$$\det(AB)=(\det A)(\det B),$$

$$\det(A)\neq 0\Leftrightarrow A^{-1}\text{存在}.$$

再来考察映射 $(A, B)\mapsto AB$ 和 $A\mapsto A^{-1}$. 因为 AB 的元素是 A, B 的元素的多项式,故映射 $(A, B)\mapsto AB$ 是 C^∞ 的;因 A^{-1} 的元素是 A 的元素的有理函数(分母不为零),故映射 $A\mapsto A^{-1}$ 也是 C^∞ 的. 于是 $Gl(n, R)$ 是一李群. $Sl(n,R)=\{A\in Gl(n,R)\,|\det(A)=+1\}$ 是 $Gl(n, R)$ 的子群,又是所谓的正则子流形,因而也是一个李群. 这个群称为**特殊线性群**(special linear group). 还有,$O(n)=\{A\in Gl(n, R)\,|\,AA^T=I\}$ 也是 $Gl(n, R)$ 的子群,又是正则子流形,因而 $O(n)$ 也是李群. $O(n)$ 称为**正交群**(orthogonal group). 条件 $AA^T=I$ 等价于矩阵 A 的行(和列)是正交标准化的,这也等价于:在 R^n 常用的基之下,A 所表示的线性变换是一个等距同构. 又,条件 $AA^T=I$ 蕴含着 $n(n+1)/2$ 个等式,因而 $O(n)$ 的维数是 $n(n-1)/2$.

5.5.2 左推移和右推移

设 G 是一个李群. 对于每个固定的元素 $g_0\in G$, 我们可以定义如下两个从 G 到 G 的可微映射:

(a) 左推移 L_{g_0}: $G\to G$, $g\mapsto g_0g$;

(b) 右推移 R_{g_0}: $G\to G$, $g\mapsto gg_0$.

对于映射 L_{g_0} 和 R_{g_0}, 按照[5.2.2]中的定义(见(5.2.1)式),分别有这两个映射的微分 $(L_{g_0})_*$ 和 $(R_{g_0})_*$(或记为 dL_{g_0} 和 dR_{g_0}).

定义 设 X 为 G 上的向量场. 若对于任意的 $g,\ g_0\in G$, 有

$$(dL_{g_0})X_g=X_{g_0g}, \tag{5.5.1}$$

则称向量场 X 是左不变的.

在(5.5.1)式中作代换 $g_0\to g,\ g\to e$, 则有

$$X_g=(dL_g)X_e, \tag{5.5.2}$$

即任何左不变向量场 X 可由该向量场在单位元 e 处的切向量生成,详细一点说,就是向量场在任一点 g 处的取值 X_g, 是 X_e 在左推移 L_g 的微分 dL_g 映射下的象.

完全类似地可定义右不变向量场.

对于 $g_0,\ g_1\in G$, 以及任何 $g\in G$, 有

$$L_{g_0}\circ R_{g_1}g=L_{g_0}(gg_1)=g_0gg_1$$

和

$$R_{g_1}\circ L_{g_0}g=R_{g_1}(g_0g)=g_0gg_1,$$

故有

$$L_{g_0}\circ R_{g_1}=R_{g_1}\circ L_{g_0}. \tag{5.5.3}$$

将(5.2.2)式应用于上式的两边,有

$$dL_{g_0}\circ dR_{g_1}=dR_{g_1}\circ dL_{g_0}. \tag{5.5.4}$$

另一方面,显然有

$$L_{g_1g_0}=L_{g_1}\circ L_{g_0},\ R_{g_1g_0}=R_{g_0}\circ R_{g_1}, \tag{5.5.5}$$

因此,由(5.2.2)式,有

$$dL_{g_1g_0}=dL_{g_1}\circ dL_{g_0},\ dR_{g_1g_0}=dR_{g_0}\circ dR_{g_1}. \tag{5.5.6}$$

由 (5.5.5) 式看出, $L_{g_0^{-1}}\circ L_{g_0}$ 和 $R_{g_0}\circ R_{g_0^{-1}}$ 为恒等映射, 因而 $dL_{g_0^{-1}}\circ dL_{g_0}$ 和 $dR_{g_0}\circ dR_{g_0^{-1}}$ 也是恒等映射, 故有

$$dL_{g_0^{-1}}=(dL_{g_0})^{-1},\ dR_{g_0^{-1}}=(dR_{g_0})^{-1}. \tag{5.5.7}$$

现在我们来介绍与左推移和右推移有关的一个概念: 伴随表示. 设 T_e 表示 G 在单位元 e 处之切空间. 对于每个 $g_0\in G$, 可诱导出线性变换:

$$\mathrm{ad}(g_0): T_e\to T_e,$$

$$X_e\mapsto(dR_{g_0^{-1}}\circ dL_{g_0})X_e. \tag{5.5.8}$$

这个变换称为 g_0 的伴随变换(adjoint transformation). 映射 $g\mapsto\mathrm{ad}(g)$ 称为 G 的伴随表示(adjoint representation). 它是从 G 到

G 的自同构群的一个同态. 事实上, 由伴随变换的定义及(5.5.4), (5.5.5), (5.5.6)及(5.5.7)诸式, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(g_1g_0)X_e&=(dR_{(g_1g_0)^{-1}}\circ dL_{g_1g_0})X_e=(dR_{g_0^{-1}g_1^{-1}}\circ dL_{g_1g_0})X_e\\&=(dR_{g_1^{-1}}\circ dR_{g_0^{-1}}\circ dL_{g_1}\circ dL_{g_0})X_e\\&=(dL_{g_1^{-1}}\circ dL_{g_1}\circ dR_{g_0^{-1}}\circ dL_{g_0})X_e\\&=(\mathrm{ad}(g_1)\circ\mathrm{ad}(g_0))X_e,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(g_0^{-1})X_e&=(dR_{g_0}\circ dL_{g_0^{-1}})X_e\\&=(dL_{g_0^{-1}}\circ dR_{g_0})X_e\\&=(dL_{g_0})^{-1}\circ(dR_{g_0^{-1}})^{-1}X_e\\&=(dR_{g_0^{-1}}\circ dL_{g_0})^{-1}X_e\\&=(\mathrm{ad}(g_0))^{-1}X_e.\end{aligned}$$

5.5.3 左不变微分形式

由定义式(5.3.3), 任意左推移 L_{g_0} 将诱导出映射

$$L_{g_0}^*:\quad T_{g_0g}^*\to T_g^*. \tag{5.5.9}$$

定义 1 设 ω 为 1 形式. 如果对任何 g_0, $g\in G$ 有

$$L_{g_0}^*\omega(g_0g)=\omega(g), \tag{5.5.10}$$

则称 1 形式 ω 是左不变的.

设 $X_g\in T_g(G)$ 为 g 处任意切向量, 则由 $L_{g_0}^*$ 之定义 (见(5.3.3)式), 有

$$L_{g_0}^*\omega(g_0g)(X_g)=\omega(g_0g)(dL_{g_0}(X_g)).$$

若 ω 是左不变的, 则由(5.5.10)式可得

$$\omega(g_0g)(dL_{g_0}(X_g))=\omega(g)(X_g). \tag{5.5.11}$$

此式往往被形式地写为

$$\omega(g_0g)=\omega(g), \tag{5.5.12}$$

作为 ω 的左不变性条件. 但应明确, (5.5.12)式的真正含义是指: 对任意的 g_0, $g\in G$ 及 $X_g\in T_g(G)$, (5.5.11)式恒成立.

G 上一切左不变 1 形式之集, 以自然的方式引入线性运算, 构成一线性空间. 若在左不变性条件(5.5.10)中以 g^{-1} 代替 g_0, 则有

$$L_{g^{-1}}^{*}\omega(e)=\omega(g).$$

此式表明，任何一个左不变1形式ω在任意点$g\in G$的取值$\omega(g)$，是此1形式在单位元e处的取值$\omega(e)$在线性变换下的象．因此刚才所说的左不变1形式的线性空间的维数与T_e^*的维数相同，从而与G的维数相同．

定义2 G上左不变1形式的线性空间的任何一组基，即任何一组n个线性无关的左不变1形式，称为G的Maurer-Cartan形式．

设$\omega_1, \cdots, \omega_n$是$G$的Maurer-Cartan形式．则任何左不变1形式ω可写作

$$\omega=\sum_i a_i\omega_i, \tag{5.5.13}$$

其中诸a_i皆为常数．对于a_i确为常数这一点，可直接证明如下．由于ω是左不变的，由左不变性条件(5.5.12)，有

$$\sum_i a_i(g_0g)\omega_i(g_0g)=\sum_i a_i(g)\omega_i(g)$$

对任何$g_0, g\in G$成立．但由于诸ω_i皆为左不变的，故

$$\omega_i(g_0g)=\omega_i(g), \quad i=1, \cdots, n.$$

从而
$$\sum_i[a_i(g_0g)-a_i(g)]\omega_i(g)=0.$$

因为$\omega_1, \cdots, \omega_n$是线性无关的，故有

$$a_i(g_0g)-a_i(g)=0,$$

从而诸a_i皆为常数．

类似的讨论可以证明下列结论：

设$\omega_1, \cdots, \omega_n$为$G$的Maurer-Cartan形式．则$G$上任何左不变$k$形式可写作

$$\omega^{(k)}=\sum_{i_1, \cdots, i_k} a_{i_1\cdots i_k}\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_k}, \tag{5.5.14}$$

其中诸$a_{i_1\cdots i_k}$为常数．

首先我们说明一下，所谓k形式$\omega^{(k)}$的左不变性是由下列条件所定义的：

$$L_{g_0}^{*}\omega^{(k)}(g_0g)=\omega^{(k)}(g).$$

其次，因为 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 是 G 的 Maurer-Cartan 形式，故它们构成 $\Lambda^1(M)$ 的一组基．由此推知

$$\{\omega_{i_1}\wedge\cdots, \wedge\omega_{i_k} | 1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n\}$$

构成 $\Lambda^k(M)$ 的一组基．因此，可将 $\omega^{(k)}$ 表示成(5.5.14)式这种形式．至于证明诸 $a_{i_1\cdots i_k}$ 皆为常数与 1 形式情形类似．

推论 设 $\dim G=n$. 那么，倘不计常数因子，一切左不变 n 形式皆相同．

5.5.4 李群的结构方程与结构常数的性质

设 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 是 G 的一组 Maurer-Cartan 形式．若 ω 是左不变的，由(5.3.30)式，对任意 $g_0\in G$ 有

$$L_{g_0}^*(d\omega)=d(L_{g_0}^*\omega)=d\omega,$$

即 $d\omega$ 亦为左不变的．因此左不变 1 形式 ω_i 的外微分 $d\omega_i$ 是左不变 2 形式．由上一段末所述之结论，有

$$d\omega_i=\sum_{j,k=1}^{n}C_{jk}^i\omega_j\wedge\omega_k,\quad i=1, \cdots, n, \tag{5.5.15}$$

其中 C_{jk}^i 为常数．作代换

$$C_{jk}^i-C_{kj}^i\to C_{jk}^i,$$

则(5.5.15)式变为

$$d\omega_i=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}C_{jk}^i\omega_j\wedge\omega_k,\quad i=1, \cdots, n, \tag{5.5.16}$$

其中 C_{jk}^i 为满足条件

$$C_{jk}^i+C_{kj}^i=0 \tag{5.5.17}$$

的常数．(5.5.16)式称为群 G 的 Maurer-Cartan 方程或结构方程．C_{jk}^i 称为群 G 关于基 $\{\omega_i\}$ 的结构常数．

注 在(5.5.15)式中，若作代换 $C_{jk}^i-C_{kj}^i\to -C_{jk}^i$，则(5.5.16)式右方多一负号．设 $X_1, \cdots, X_n$ 为对偶于 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 的向量场，此时 $[X_j, X_k]=\sum C_{jk}^iX_i$，其中 C_{jk}^i 将与结构常数一致．

利用(5.3.33)和(5.3.35)二式并计及(5.5.17)式，可将(5.5.16)式改写为

$$d\omega_i(\delta)-\delta\omega_i(d)=\frac{1}{2}\sum_{j,k}C^i_{jk}(\omega_j(d)\omega_k(\delta)-\omega_j(\delta)\omega_k(d))$$
$$=\sum_{j,k}C^i_{jk}\omega_j(d)\omega_k(\delta). \qquad (5.5.18)$$

在(5.5.18)式右方出现的 $\omega_j(d)\omega_k(\delta)$ 是微分形式的通常的乘积，而不是外积.

以下我们来讨论结构常数的性质.

性质 1 结构常数 C^i_{jk} 关于指标 j,k 是反称的，即上述(5.5.17)式

$$C^i_{jk}=-C^i_{kj}.$$

性质 2 对一切 $i,p,q,k\leqslant n$，有恒等式

$$\sum_{j=1}^{n}(C^i_{jk}C^j_{pq}+C^i_{jq}C^j_{kp}+C^i_{jp}C^j_{qk})=0. \qquad (5.5.19)$$

证明 于(5.5.16)式两边取外微分，有

$$0=d(d\omega_i)=\frac{1}{4}\sum C^i_{jk}(C^j_{pq}\omega_p\wedge\omega_q\wedge\omega_k-C^k_{pq}\omega_j\wedge\omega_p\wedge\omega_q)$$
$$=\frac{1}{2}\sum C^i_{jk}C^j_{pq}\omega_p\wedge\omega_q\wedge\omega_k$$
$$=\sum_j\sum_{p<q<k}(C^i_{jk}C^j_{pq}+C^i_{jq}C^j_{kp}+C^i_{jp}C^j_{qk})\omega_p\wedge\omega_q\wedge\omega_k$$

由于 $\{\omega_p\wedge\omega_q\wedge\omega_k|1\leqslant p<q<k\leqslant n\}$ 是左不变 3 形式构成的向量空间的一组基，从而线性无关，故有(5.5.19)式.

我们注意，由(5.5.15)式所定义的诸结构常数是与基 $\{\omega_i\}$ 的选取有关的. 但是对于某些特定的李群，结构常数也存在着与基的选取无关的性质，即所谓内蕴性质，它们刻划了李群本身的某些特征.

设想除基 $\{\omega_i\}$ 外，又选取了另一组基 $\{\phi_i\}$：

$$\phi_i=\sum_{h=1}^{n}u_{ih}\omega_h,\quad \omega_i=\sum_{h=1}^{n}U_{ih}\phi_h, \qquad (5.5.20)$$

其中 u_{ih}, U_{ih} 皆为常数，致

$$\sum_{h=1}^{n}u_{ih}U_{hj}=\delta^i_j. \qquad (5.5.21)$$

若相对于基 $\{\phi_i\}$ 的结构方程为

$$d\phi_j=\frac{1}{2}\sum_{s,k}C'^j_{sk}\phi_s\wedge\phi_k.$$

让我们来求结构常数 C'^j_{sk} 的表达式. 对

$$\phi_j=\sum_{i=1}^{n}u_{ji}\omega_i$$

取外微分，有

$$\begin{aligned}d\phi_j&=\sum_i u_{ji}\,d\omega_i=\frac{1}{2}\sum_i u_{ji}\sum_{m,h}C^i_{mh}\omega_m\wedge\omega_h\\&=\frac{1}{2}\sum_{i,m,h}u_{ji}C^i_{mh}\left(\sum_s U_{ms}\phi_s\right)\wedge\left(\sum_k U_{hk}\phi_k\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{s,k}\left(\sum_{i,m,h}u_{ji}C^i_{mh}U_{ms}U_{hk}\right)\phi_s\wedge\phi_k.\end{aligned}$$

由此推知，相对于基 $\{\phi_i\}$，群的结构常数为

$$C'^j_{sk}=\sum_{i,m,h}C^i_{mh}U_{ms}U_{hk}u_{ji}. \tag{5.5.22}$$

等式(5.5.22)表明，若对于 $i,\ m,\ h=1,\ \cdots,\ n$ 有 $C^i_{mh}=0$，则对于 $j,\ s,\ k=1,\ \cdots,\ n$ 有 $C'^j_{sk}=0$. 反之亦然(因为我们同样可以用 C'^j_{sk} 去表示 C^i_{mh}). 由此得到

性质 3 设 C^i_{mh} 为李群的结构常数. 则条件

$$C^i_{mh}=0,\quad i,\ m,\ h=1,\ \cdots,\ n \tag{5.5.23}$$

与基的选取无关.

注 当诸 $C^i_{jk}=0$ 时必有 $[X,\ Y]=0$. 此时 G 的李代数 g 是可换的. 而连通李群 G 为可换的充要条件是其李代数为可换. 可见，条件(5.5.23)为连通李群是 Abel 群的充要条件(G 上左不变向量场构成的线性空间，在向量场的括号运算$[\cdot,\ \cdot]$下，构成一个李代数，称为李群 G 的李代数. 关于李代数及其与李群的关系，本书不拟详论).

性质 4 设 C^i_{jk} 为李群的结构常数. 则条件

$$\sum_{i=1}^{n}C^i_{mi}=0,\quad m=1,\ \cdots,\ n \tag{5.5.24}$$

与基的选取无关.

证明 由(5.5.21)和(5.5.22)二式，有

$$\sum_{j=1}^{n} C'^{j}_{sj}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i,m,h} C^{i}_{mh}U_{ms}\bar{U}_{hj}u_{ji}$$
$$=\sum_{i,m,h} C^{i}_{mh}U_{ms}\delta^{i}_{h}=\sum_{i,m} C^{i}_{mi}U_{mi}$$
$$=\sum_{m} U_{ms}\left(\sum_{i} C^{i}_{mi}\right).$$

后面将证明，条件(5.5.24)是幺模群(unimodular group)的特征.

现在让我们对矩阵李群作一些具体的考察. 设 G 为矩阵李群，其元素 $g=(g_{ij})$ 为 $k\times k$ 矩阵. 我们的目标是求出矩阵李群的 Maurer-Cartan 形式与结构方程. 考虑形式矩阵

$$\Omega=g^{-1}dg=(\omega_{ij}), \tag{5.5.25}$$

记 g 的逆矩阵 $g^{-1}=(\gamma_{ij})$，则

$$\omega_{ij}=\sum_{h=1}^{k}\gamma_{ih}\,dg_{hj}$$

为 1 形式. 由于

$$\Omega(g_0g)=(g_0g)^{-1}d(g_0g)=g^{-1}g_0^{-1}g_0dg=\Omega(g),$$

故诸 ω_{ij} 皆为左不变 1 形式. 若群流形 G 的维数等于 n，则 k^2 个 ω_{ij} 中恰好可选出 n 个线性无关者，作为李群 G 的 Maurer-Cartan 形式. 此外，

$$d\Omega=d(g^{-1})\wedge dg=-g^{-1}dgg^{-1}\wedge dg=-\Omega\wedge\Omega, \tag{5.5.26}$$

G 的结构方程即隐含于(5.5.26)式之中.

例 1 考虑矩阵群 G，$g\in G$ 为 2×2 矩阵：

$$g=\begin{pmatrix} x & 0 \\ e^{y} & x \end{pmatrix},\qquad x\neq 0. \tag{5.5.27}$$

群流形为 R^2 除去 $x=0$ 而外的部分. 易见

$$\Omega=g^{-1}\,dg=\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{x} & 0 \\ \dfrac{e^{y}}{x^{2}}\,dx+\dfrac{e^{y}}{x}\,dy & \dfrac{dx}{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ \omega_2 & \omega_1 \end{pmatrix}. \tag{5.5.28}$$

Maurer-Cartan 形式是:

$$\omega_1=\frac{dx}{x},\quad \omega_2=\frac{e^y}{x^2}dx+\frac{e^y}{x}dy. \tag{5.5.29}$$

由

$$d\Omega=-\Omega\wedge\Omega=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

看出结构方程为

$$d\omega_1=0,\ d\omega_2=0, \tag{5.5.30}$$

即所有的结构常数全为零. 注意到 G 的可换性, 这便是理所当然的了.

例 2 考虑矩阵群 G, $g\in G$ 为 3×3 矩阵:

$$g=\begin{pmatrix}x&0&y\\x\ln x&x&z\\0&0&1\end{pmatrix},\quad x\neq0. \tag{5.5.31}$$

群流形是 R^3 除 $x=0$ 而外的部分. 我们有

$$\Omega=g^{-1}dg=\begin{pmatrix}\frac{dx}{x}&0&\frac{dy}{x}\\ \frac{dx}{x}&\frac{dx}{x}&-\frac{\ln x}{x}dy+\frac{dz}{x}\\ 0&0&0\end{pmatrix}, \tag{5.5.32}$$

于是一组 Maurer-Cartan 形式是:

$$\omega_1=\frac{dx}{x},\quad \omega_2=\frac{dy}{x},\quad \omega_3=-\frac{\ln x}{x}dy+\frac{dz}{x}. \tag{5.5.33}$$

这时(5.5.32)式成为

$$\Omega=\begin{pmatrix}\omega_1&0&\omega_2\\ \omega_1&\omega_1&\omega_3\\ 0&0&0\end{pmatrix}.$$

写出 $d\Omega=-\Omega\wedge\Omega$, 即

$$\begin{pmatrix}d\omega_1&0&d\omega_2\\ d\omega_1&d\omega_1&d\omega_3\\ 0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-\omega_1\wedge\omega_2\\ 0&0&-\omega_1\wedge\omega_2-\omega_1\wedge\omega_3\\ 0&0&0\end{pmatrix},$$

于是结构方程为

$$d\omega_1=0,\ d\omega_2=-\omega_1\wedge\omega_2,\ d\omega_3=-\omega_1\wedge\omega_2-\omega_1\wedge\omega_3.$$

因此这个群不为零的结构常数是:

$$C_{12}^2=-C_{21}^2=-1,\ C_{12}^3=-C_{21}^3=-1,\ C_{13}^3=-C_{31}^3=1. \tag{5.5.34}$$

例 3 考虑矩阵群 G, $g\in G$ 为 3×3 矩阵:

$$g=\begin{pmatrix} x & 0 & \ln z \\ y & u & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad x\neq 0,\ u\neq 0,\ z>0. \tag{5.5.35}$$

群流形是从 R^5 中除去超平面 $x=0$、除去超平面 $u=0$ 以及除去闭半空间 $z\leqslant 0$. 此矩阵李群的维数等于 5.

我们有

$$\Omega=g^{-1}dg=\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{x} & 0 & \dfrac{dz}{xz} \\ -\dfrac{y\,dx}{xu}+\dfrac{dy}{u} & \dfrac{du}{u} & -\dfrac{y\,dz}{xuz}+\dfrac{dw}{u} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \omega_2 \\ \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

一组 Maurer-Cartan 形式为

$$\omega_1=\frac{dx}{x},\quad \omega_2=\frac{dz}{xu},\quad \omega_3=-\frac{y\,dx}{xu}+\frac{dy}{u},$$
$$\omega_4=\frac{du}{u},\quad \omega_5=-\frac{y\,dz}{xuz}+\frac{dw}{u}. \tag{5.5.36}$$

再由 $d\Omega=-\Omega\wedge\Omega$ 得结构方程如下:

$$d\omega_1=0,\ d\omega_2=-\omega_1\wedge\omega_2,\ d\omega_3=\omega_1\wedge\omega_3+\omega_3\wedge\omega_4,$$
$$d\omega_4=0,\ d\omega_5=\omega_2\wedge\omega_3-\omega_4\wedge\omega_5. \tag{5.5.37}$$

不为零的结构常数是:

$$C_{12}^2=-C_{21}^2=-1,\ C_{13}^3=-C_{31}^3=1,\ C_{34}^3=-C_{43}^3=-1,$$
$$C_{23}^5=-C_{32}^5=1,\ C_{45}^5=-C_{54}^5=-1. \tag{5.5.38}$$

关于右不变1形式的概念及有关结论，与左不变1形式的情

形类似,完全可作平行的讨论. 今简述如次.

1形式 $\overline{\omega}$ 若对任何 g_0, $g\in G$ 满足

$$R_{g_0}^*\overline{\omega}(gg_0)=\overline{\omega}(g),\tag{5.5.39}$$

则称 $\overline{\omega}$ 是右不变的. 右不变性可形式地写作

$$\overline{\omega}(gg_0)=\overline{\omega}(g).\tag{5.5.40}$$

对于矩阵李群,类似于(5.5.25)式,可考虑形式矩阵

$$\overline{\Omega}=dgg^{-1}.\tag{5.5.41}$$

由于 $$\overline{\Omega}(gg_0)=d(gg_0)(gg_0)^{-1}=\overline{\Omega}(g),$$

可见 $\overline{\Omega}$ 的元素皆为右不变1形式. 选出其中 $n=\dim G$ 个线性无关者即为右不变1形式构成的线性空间的基.

另外,形式矩阵 Ω 与 $\overline{\Omega}$ 之间显然有下列关系:

$$\Omega(g^{-1})=gd(g^{-1})=-dgg^{-1}=-\overline{\Omega}(g).\tag{5.5.42}$$

关系式(5.5.42), 对于一般的李群 G(即不限于矩阵李群)的讨论是一项有益的启示. 设 $\{\omega_i\}$ 是 G 的左不变1形式构成的线性空间的基. 今考虑由关系

$$\overline{\omega}_i(g)=-\omega_i(g^{-1}),\quad i=1,\cdots,n\tag{5.5.43}$$

所定义的 $\overline{\omega}_i$. 由于

$$\overline{\omega}_i(gg_0)=-\omega_i(g_0^{-1}g^{-1})=-\omega_i(g^{-1})=\overline{\omega}(g),$$

故 $\{\overline{\omega}_i\}$ 是右不变1形式构成的线性空间的基. 与(5.5.16)式类似,有

$$d\overline{\omega}_i=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\overline{C}_{jk}^i\overline{\omega}_j\wedge\overline{\omega}_k,\tag{5.5.44}$$

其中诸 $\overline{C}_{jk}^i$ 为常数. 将(5.5.44)式应用于 g^{-1}处,并计及(5.5.43)式,有

$$-d\omega_i=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\overline{C}_{jk}^i\omega_j\wedge\omega_k.\tag{5.5.45}$$

将此式与(5.5.16)式相比较,可见 $\overline{C}_{jk}^i=-C_{jk}^i$. 因此对右不变1形式而言,结构方程为

$$d\overline{\omega}_i=-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}C_{jk}^i\overline{\omega}_j\wedge\overline{\omega}_k.\tag{5.5.46}$$

又,与(5.5.18)式类似,此时(5.5.46)式可改写为

$$d\overline{\omega}_i(\delta)-\delta\overline{\omega}_i(d)=-\sum_{j,k}C^i_{jk}\overline{\omega}_j(d)\overline{\omega}_k(\delta). \qquad (5.5.47)$$

再次考察其元素由(5.5.31)式给出的矩阵李群. 因

$$\overline{\Omega}=dgg^{-1}=\begin{pmatrix} x^{-1}dx & 0 & -yx^{-1}dx+dy \\ x^{-1}dx & x^{-1}dx & -yx^{-1}dx-zx^{-1}dx+dz \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故有

$$\overline{\omega}_1=\frac{dx}{x},\ \overline{\omega}_2=-\frac{y}{x}dx+dy,\ \overline{\omega}_3=-\frac{y+z}{x}dx+dz. \qquad (5.5.48)$$

结构方程为

$$d\overline{\omega}_1=0,\ d\overline{\omega}_2=\overline{\omega}_1\wedge\overline{\omega}_2,\ d\overline{\omega}_3=\overline{\omega}_1\wedge\overline{\omega}_2+\overline{\omega}_1\wedge\overline{\omega}_3. \qquad (5.5.49)$$

结构常数与(5.5.34)式所示相比正好反号.

5.5.5 李群的运动密度

设 $\{\omega_i\}$ 是李群 G 的一组 Maurer–Cartan 形式, 则

$$d_LG=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n \qquad (5.5.50)$$

是左不变的 n 形式. 倘不计一个常数因子, 它是 G 上唯一的左不变 n 形式. 记

$$d_L(g_0G)=\omega_1(g_0g)\wedge\cdots\wedge\omega_n(g_0g),$$

于是 n 形式(5.5.50)的左不变性可形式地表述为

$$d_L(g_0G)=d_LG. \qquad (5.5.51)$$

d_LG 一般称为 G 的左不变体积元, 但在积分几何里习惯上称之为 G 的运动密度(kinematic density).

李群 G 上的右不变体积元类似地定义为

$$d_RG=\overline{\omega}_1\wedge\cdots\wedge\overline{\omega}_n, \qquad (5.5.52)$$

其中 $\{\overline{\omega}_i\}$ 为右不变 1 形式构成的线性空间的一组基. d_RG 的右不变性可形式地表示为

$$d_R(Gg_0)=d_RG, \qquad g_0\in G. \qquad (5.5.53)$$

对积分几何的研究具有特别重要意义的是一种特殊的李

群——幺模群.

定义 若一个李群的左不变体积元同时也是右不变的，则称此李群是幺模群.

显然，对幺模群而言，$d_L G$ 与 $d_R G$ 仅相差一个常数因子. 适当调整 $\{\omega_i\}$ 和 $\{\overline{\omega}_i\}$ 即可致 $d_L G = d_R G$; 这时，我们把这个既是左不变体积元又是右不变体积元的 n 形式简称为 G 的不变体积元. 又，因为

$$\omega_i(g) = -\overline{\omega}_i(g^{-1}),$$

故不计符号则有

$$d_L G(g) = d_R G(g^{-1}). \tag{5.5.54}$$

这表明，对幺模群来说，其体积元在映射 $g \mapsto g^{-1}$ 之下也是不变的.

以下介绍李群 G 是幺模群的条件.

定理 1 李群 G 是幺模群的充要条件是 G 的结构常数满足条件

$$\sum_{k=1}^{n} C_{jk}^{k} = 0, \quad j = 1, \cdots, n. \tag{5.5.55}$$

证明 以 δ 表示初等的左推移，d 表示初等的右推移. 由 $\overline{\omega}_i$ 的右不变性有 $d\overline{\omega}_i(\delta) = 0$. 于是结构方程(5.5.47)成为

$$\delta\overline{\omega}_i(d) = \sum_{j,k} C_{jk}^{i} \overline{\omega}_j(d) \overline{\omega}_k(\delta). \tag{5.5.56}$$

另一方面，由于 $\{\overline{\omega}_i\}$ 是 $\Lambda^1(M)$ 的一组基，故

$$\omega_i = \sum_k a_{ik} \overline{\omega}_k, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{5.5.57}$$

其中 a_{ik} 为 G 上的函数. 由 ω_i 的左不变性有 $\delta\omega_i(d) = 0$, 于是有

$$\sum_k (\delta a_{ik} \overline{\omega}_k(d) + a_{ik} \delta\overline{\omega}_k(d)) = 0. \tag{5.5.58}$$

将(5.5.56)式代入(5.5.58)式，有

$$\begin{aligned} &\sum_k [\delta a_{ik} \overline{\omega}_k(d) + a_{ik} (\sum_{s,j} C_{sj}^{k} \overline{\omega}_s(d) \overline{\omega}_j(\delta))] \\ &= \sum_k \delta a_{ik} \overline{\omega}_k(d) + \sum_k a_{ik} (\sum_{s,j} C_{sj}^{k} \overline{\omega}_s(d) \overline{\omega}_j(\delta)) = 0 \end{aligned}$$

在第二个和式中先对指标 k 及 j 求和并将 k 记为 m, 然后对指标 s 求和，将 s 记为 k, 并注意 $C_{jk}^{m} = -C_{kj}^{m}$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\delta a_{ik}-\sum_{m,j=1}^{n}C_{jk}^{m}a_{im}\overline{\omega}_{j}(\delta)\right)\overline{\omega}_{k}(d)=0. \qquad (5.5.59)$$

利用$\{\overline{\omega}_k(d)\}$的线性无关性,并用 d 代替 δ(d 和 δ 都表示通常的微分),我们有

$$da_{ik}-\sum_{j,m}C_{jk}^{m}a_{im}\overline{\omega}_{j}=0. \qquad (5.5.60)$$

方程组(5.5.57)的系数矩阵的行列式 $\det(a_{ik})$ 简记为 $\Delta(g)$,则

$$d\Delta=\sum_{i,k=1}^{n}\alpha_{ik}\,da_{ik}, \qquad (5.5.61)$$

其中 α_{ik} 为行列式 Δ 中元素 a_{ik} 的代数余子式,即

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}a_{ih}=\Delta\cdot\delta_{h}^{k}. \qquad (5.5.62)$$

以 α_{ik} 乘(5.5.60)式并对 i, k 求和,得

$$\frac{d\Delta}{\Delta}=\sum_{j,k=1}^{n}C_{jk}^{k}\overline{\omega}_{j}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}C_{jk}^{k}\right)\overline{\omega}_{j}. \qquad (5.5.63)$$

(5.5.63)式是进一步推理的主要依据. 由(5.5.57)式,有

$$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n=\Delta(g)\overline{\omega}_1\wedge\cdots\wedge\overline{\omega}_n,$$

不计符号,则可写成

$$d_LG=\Delta(g)d_RG. \qquad (5.5.64)$$

若 G 是幺模群, 则 $\Delta(g)=\text{const.}$, 从而 $d\Delta=0$. 由(5.5.63)式, 有

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}C_{jk}^{k}\right)\overline{\omega}_{j}=0.$$

因为 $\{\overline{\omega}_j\}$ 是线性无关的, 故条件(5.5.55)成立. 反之, 设条件(5.5.55)成立,则仍由(5.5.63)式可见 $d\Delta=0$,于是 $\Delta=\text{const.}$,从而 G 是幺模群. 证毕.

(5.5.64)式中出现的行列式 $\Delta(g)$ 有一些十分重要的性质.

定理 2 映射 $g\mapsto\Delta(g)$ 是从 G 到正实数乘法群的一个同态.

证明 将映射 $R_{g_0}^*$ 作用于(5.5.64)式的两边. 作用于右方的结果是

$$R_{g_0}^*[\Delta(g)d_RG]=\Delta(gg_0)R_{g_0}^*d_RG$$
$$=\Delta(gg_0)\,d_RG=\frac{\Delta(gg_0)}{\Delta(g)}\,d_LG,$$

其中利用了 d_RG 的右不变性及(5.5.64)式本身. 作用于左方的结果为 $R_{g_0}^*d_LG$, 即

$$R_{g_0}^*\,d_LG=\frac{\Delta(gg_0)}{\Delta(g)}\cdot d_LG. \tag{5.5.65}$$

另一方面, 由(5.3.6)和(5.5.3)二式及 d_LG 的左不变性, 有

$$\begin{aligned}L_{g_1}^*\circ R_{g_0}^*d_LG&=(R_{g_0}\circ L_{g_1})^*d_LG=(L_{g_1}\circ R_{g_0})^*d_LG\\&=R_{g_0}^*\circ L_{g_1}^*d_LG=R_{g_0}^*d_LG,\end{aligned}$$

可见(5.5.65)式之左方 $R_{g_0}^*d_LG$ 也是左不变 n 形式, 由此可以断言, $R_{g_0}^*d_LG$ 与 d_LG 至多相差一个常数因子(见5.5.3段末之推论). 于是由(5.5.65)式可得

$$\frac{\Delta(gg_0)}{\Delta(g)}=C, \tag{5.5.66}$$

其中 C 不依赖于 g, 但一般与 g_0 有关. 在关系

$$\bar{\omega}_i(g)=-\omega_i(g^{-1})$$

中令 $g=e$, 则有

$$\bar{\omega}_i(e)=-\omega_i(e), \quad i=1, \cdots, n.$$

从而, 若不计符号, 有

$$(d_LG)_e=(d_RG)_e,$$

亦即 $\Delta(e)=1$. 再由(5.5.66)式, 便有

$$C=\Delta(g_0).$$

于是, 对一切 $g,\ g_0\in G$, 有

$$\Delta(gg_0)=\Delta(g)\Delta(g_0),\ \Delta(g^{-1})=\frac{1}{\Delta(g)}. \tag{5.5.67}$$

这就证明了定理.

推论 1 具有有限体积之李群必定是幺模群.

证明 利用(5.5.67)之第一式, (5.5.65)式成为

$$R_{g_0}^*d_LG=\Delta(g_0)d_LG.$$

此式可形式地写为

$$d_L(Gg_0)=\Delta(g_0)d_LG. \tag{5.5.68}$$

今若 G 具有有限体积, 则 $d_L(Gg_0)$ 和 d_LG 在整个 G 上的积分值相同, 从而对一切 $g_0\in G$ 有 $\Delta(g_0)=1$, 故 G 为幺模群.

因紧致群具有有限体积，故立即有

推论 2 紧致李群是幺模群.

另外，G 是幺模群的条件亦可借伴随表示概念来表述.

定理 3 李群 G 是幺模群的充要条件是

$$\det \mathrm{ad}(g_0)=1. \tag{5.5.69}$$

证明 回顾 5.5.2 段中关于伴随变换的定义：

$$\mathrm{ad}(g_0):\ T_e\to T_e,$$
$$X_e\mapsto(dR_{g_0^{-1}}\circ dL_{g_0})X_e.$$

由此可诱导出变换

$$(\mathrm{ad}(g_0))^*:\ T_e^*\to T_e^*,$$
$$\omega(e)\mapsto(R_{g_0^{-1}}\circ L_{g_0})^*\omega(e)=L_{g_0}^*\circ R_{g_0^{-1}}\omega(e). \tag{5.5.70}$$

不难看出，变换(5.5.70)的矩阵与变换 $\mathrm{ad}(g_0)$ 的矩阵互为转置. 其行列式相等:

$$\det \mathrm{ad}(g_0)=\det(\mathrm{ad}(g_0))^*.$$

于 $d_LG=\Delta(g)d_RG$ 两边取变换 $(\mathrm{ad}(g_0))^*$，有

$$\begin{aligned}L_{g_0}^*\circ R_{g_0^{-1}}^*d_LG&=\Delta(g_0gg_0^{-1})L_{g_0}^*d_RG\\&=\Delta(g_0gg_0^{-1})L_{g_0}^*\left(\frac{d_LG}{\Delta(g)}\right)=\frac{\Delta(g_0gg_0^{-1})}{\Delta(g_0g)}d_LG.\end{aligned} \tag{5.5.71}$$

由(5.3.23)式，$F^*(\omega\wedge\phi)=F^*(\omega)\wedge F^*(\phi)$，有

$$\begin{aligned}L_{g_0}^*\circ R_{g_0^{-1}}^*d_LG&=L_{g_0}^*\circ R_{g_0^{-1}}^*(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n)\\&=(L_{g_0}^*\circ R_{g_0^{-1}}^*\omega_1)\wedge\cdots\wedge(L_{g_0}^*\circ R_{g_0^{-1}}\omega_n).\end{aligned} \tag{5.5.72}$$

设线性变换 $\mathrm{ad}(g_0)$ 的矩阵为(γ_{ij})，则$(\mathrm{ad}(g_0))^*$ 的矩阵为$(\gamma_{ij})^T=(\gamma_{ji})$，于是

$$L_{g_0}^*\circ R_{g_0^{-1}}^*\omega_k=\sum_s\gamma_{sk}\omega_s,\quad k=1,\ \cdots,\ n.$$

代入(5.5.72)式，有

$$L_{g_0}^*\circ R_{g_0^{-1}}^*d_LG=\det(\mathrm{ad}(g_0))^*d_LG=\det \mathrm{ad}(g_0)d_LG. \tag{5.5.73}$$

再代入(5.5.71)式，便有

$$\det \mathrm{ad}(g_0) d_L G = \frac{\Delta(g_0 g g_0^{-1})}{\Delta(g_0 g)} d_L G. \qquad (5.5.74)$$

令 $g=e$，则有

$$\det \mathrm{ad}(g_0) = \frac{\Delta(e)}{\Delta(g_0)}. \qquad (5.5.75)$$

今设 G 为幺模群，则 $\Delta=\text{const.}$，从而 $\Delta(g_0)=\Delta(e)=\text{const.}$，故 $\det \mathrm{ad}(g_0)=1$．反之，设 $\det \mathrm{ad}(g_0)=1$ 对任何 $g_0\in G$ 成立，则对任何 $g_0\in G$ 有 $\Delta(g_0)=\Delta(e)$，即 $\Delta=\text{const.}$，从而 G 是幺模群．

§5.6 齐性空间的密度和测度

5.6.1 李群作用于流形 齐性空间

如所周知，抽象群可定义为一些对象的集，其中规定了满足某些公理的复合律．这种定义方式是相对较晚近的事．最初，群作为“排列”之集而出现．以“排列”的复合作为乘积运算，则正好吻合于前述抽象群之定义．对于“排列”作广义理解，遂导致变换群概念．

定义 设 G 为一群，X 为一集．所谓 G(左)作用于 X 是指：若存在映射 θ: $G\times X\to X$，满足

1° 若 e 表示 G 之单位元，则

$$\theta(e, x)=x, \ \forall x\in X;$$

2° 若 $g_1, g_2\in G$，则

$$\theta(g_1, \theta(g_2, x))=\theta(g_1 g_2, x), \ \forall x\in X.$$

当 G 为拓扑群(即群上附有拓扑，且群的运算为连续)，X 是拓扑空间，θ 是连续映射，则称此作用是连续的．当 G 为李群，X 是 C^∞ 流形，θ 是 C^∞ 映射，则称此作用是 C^∞ 作用或光滑作用．

对于任意固定的 $g\in G$，由 $\theta_g(x)=\theta(g, x)$ 可定义映射 θ_g: $X\to X$．显然，映射 $g\mapsto\theta_g$ 是从 G 映入 $S(X)$(X 的对称群)的一个同态；反之，任何这样一个同态决定了一个作用(置 $\theta(g, x)=\theta_g(x)$ 即可)．若此同态映射是单射，则称相应的作用是有效的(effective)．同态 $g\mapsto\theta_g$ 是单射的充要条件是：仅当 $g=e$ 时，θ_g

才是恒等映射．可见有效作用是这样一种作用，在此作用下使 X 的每个点保持不变的仅有的元素是单位元 e．另外，若 X 是 C^∞ 流形，G 是李群，且 G 在 X 上的作用是光滑的，则每个 θ_g 是 X 到自身的微分同胚．借助于映射 $g\mapsto\theta_g$，G 可同化于 $S(X)$ 的一个子群．通常称 G 是 X 上的李变换群．

关于李群在流形上的作用，有一种非常重要的特殊情形，即所谓可迁作用(transitive action)．若对于每一点对 $p, q\in X$，存在 $g\in G$ 致 $\theta_g(p)=q$，则称此作用是可迁的或传递的．又，若这样的 g 还是唯一的，则此作用称为简单可迁的(simple transitive)．

定义　若李群 G 是流形 X 上的一个 C^∞ 的可迁的作用，则称流形 X 是李群 G 的齐性空间．

设 G 是一群，H 是 G 的任意子群，G/H 表示左陪集之集．由 $\lambda(g, xH)=gxH$ 定义映射 λ: $G\times G/H\to G/H$．则显然可见这是一个 G 在 G/H 上的(左)作用．事实上，

1° $\lambda(e, xH)=xH$;

2° $\lambda(g_1, \lambda(g_2, xH))=\lambda(g_1, g_2xH)=(g_1g_2)xH$

$$=\lambda(g_1g_2, xH).$$

刚才是从纯集论的观点来说的．今若 G 是李群，H 是 G 的闭的李子群，则可以证明 G/H 上可赋予唯一的 C^∞ 可微构造致上述作用 λ: $G\times G/H\to G/H$ 是 C^∞ 的可迁作用，从而使 G/H 成为 G 的齐性空间．

5.6.2 G/H 上不变密度存在的条件

设 G 是 n 维李群，H 是 G 的 $(n-m)$ 维闭的李子群．此时齐性空间 G/H 为 m 维．

H 及其诸左陪集 gH 皆是微分流形 G 的 $(n-m)$ 维子流形，并且通过 G 的每一点有一个且仅有一个这样的子流形．因此，它们必定是某完全可积 Pfaff 方程组

$$\omega_1=0, \cdots, \omega_m=0 \tag{5.6.1}$$

的积分流形．其中诸 ω_i 皆为 G 上的 1 形式．

因为 H 以及诸左陪集 gH 作为一个总体在 G 的(左)作用下保持不变，从而诸子流形 gH 决定的分布可由左不变形式生成，所以诸 ω_i 可取作左不变的 1 形式. 从而它们是 Maurer-Cartan 形式的(带常系数的)线性组合. 因此，我们不妨假定(5.6.1)式中的 $\omega_1, \cdots, \omega_m$ 恰为 Maurer-Cartan形的前 m 个.

今考虑 m 形式

$$d(G/H)=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_m, \tag{5.6.2}$$

它是关于 G 不变的 m 形式(这里及以下所说的"关于 G 不变"，都是指"在 G 的左作用下不变"). 若不计一个常数因子，它是关于 G 不变的唯一的 m 形式. 事实上，任何另外的不变的 m 形式可写作 $f(g)d(G/H)$，由不变性，有

$$f(g_0g)d(G/H)=f(g)d(G/H),$$

因而
$$f(g_0g)=f(g),\ \forall g_0\in G.$$

由于 G 可迁地作用于 G/H 上，故 $f(g)=\text{const.}$. 至此，我们尚不能肯定 $d(G/H)$ 一定是 G/H 上的运动密度，这是由于 $d(G/H)$ 不一定是 G/H 上的微分形式，即当 $g\in G$ 在同一个左陪集上变动时 $d(G/H)$ 之值可能变化. 下面的定理表述了 $d(G/H)$ 是 G/H 上运动密度的条件.

定理 G, H 之假定同前. m 形式 $d(G/H)$ 是 G/H 上的运动密度的充要条件是

$$d(d(G/H))=0. \tag{5.6.3}$$

证明 设 G 的点的局部坐标为 $(\xi_1, \cdots, \xi_m, y_{m+1}, \cdots, y_n)$，使得 $\xi_1=C_1, \cdots, \xi_m=C_m$(诸 C_i 为常数)表示子流形 gH，而 $y_{m+1}, \cdots, y_n$ 为 gH 上之局部坐标. 由于 $\omega_1, \cdots, \omega_m$ 是 G 之 Maurer-Cartan 形式的前 m 个且 $\omega_1=0, \cdots, \omega_m=0$ 等价于 $d\xi_1=0, \cdots, d\xi_m=0$，故每个 $\omega_i(i=1, \cdots, m)$ 皆是 $d\xi_1, \cdots, d\xi_m$ 的线性组合. 从而

$$d(G/H)=F(\xi_1, \cdots, \xi_m, y_{m+1}, \cdots, y_n)d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_m. \tag{5.6.4}$$

在 gH 上取上式的变分 δ，因为在 gH 上诸 ξ_i 保持为常数，故有

$$\delta(d(G/H)) = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_j} dy_j \wedge d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_m. \tag{5.6.5}$$

另一方面，取(5.6.4)式之外微分，有

$$d(d(G/H)) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} d\xi_j \wedge d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_m + \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_j} dy_j \wedge d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_m. \tag{5.6.6}$$

上式右方第一个和式显然为零，再与(5.6.5)式比较便可看出：沿 gH 有

$$d(d(G/H)) = \delta(d(G/H)). \tag{5.6.7}$$

当点在同一个左陪集中变化时，$d(G/H)$保持不变等价于 $\delta(d(G/H))=0$；而由(5.6.7)式可见，后者又等价于条件(5.6.3)．证毕．

5.6.3 Weil 条件

现在来推导 G/H 上不变密度存在条件的另一表述形式，即 Weil 条件．

仍设 G 的点的局部坐标为$(\xi_1, \cdots, \xi_m, y_{m+1}, \cdots, y_n)$，使得当 $\xi_1, \cdots, \xi_m$ 保持为常数时表示子流形 gH．设 $I=(e_1, \cdots, e_n)$是 G 的单位元．我们取$(\xi_1, \cdots, \xi_m, e_{m+1}, \cdots, e_n)$作为 gH 的代表元，而以$(e_1, \cdots, e_m, e_{m+1}, \cdots, e_n)$作为 H 的代表元．属于 H 的任意元素 g_H 其坐标具形状$(e_1, \cdots, e_m, y_{m+1}, \cdots, y_n)$．

如前段所述，ω_i 可表示为

$$\omega_i(\xi, y, d\xi), \quad i=1, \cdots, m. \tag{5.6.8}$$

至于其余的 $n-m$ 个 Maurer-Cartan 形式 $\omega_s (s=m+1, \cdots, n)$其一般形状应为

$$\omega_s = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{sk}(\xi_1, \cdots, \xi_m, y_{m+1}, \cdots, y_n) d\xi_k + \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_{sk}(\xi_1, \cdots, \xi_m, y_{m+1}, \cdots, y_n) dy_k. \tag{5.6.9}$$

在(5.6.9)式右方第二个和式中，若令 $\xi_1=e_1, \cdots, \xi_m=e_m$，便

得到 $n-m$ 个新的 1 形式 $\tilde{\omega}_s(s=m+1, \cdots, n)$. $\omega_i(i=1, \cdots, m)$ 与 $\tilde{\omega}_s(s=m+1, \cdots, n)$ 一起仍然构成 G 的 Maurer-Cartan 形式. 而这时(5.6.9)式右方第二和式与 $\xi_1, \cdots, \xi_m$ 无关，简记为 $\omega_s^H(y, dy)$. 显然 $\omega_s^H(y, dy)\ (s=m+1, \cdots, n)$ 构成 H 的 Maurer-Cartan 形式. 又，(5.6.9)式右方第一个和式简记为 $\omega_s^*(\xi, y, d\xi)$. 我们将 $\tilde{\omega}_s$ 仍记为 ω_s，则有

$$\omega_s=\omega_s^*(\xi, y, d\xi)+\omega_s^H(y, dy), \quad s=m+1, \cdots, n. \tag{5.6.10}$$

据(5.6.8)和(5.6.10)，作外积便得到

$$dG(g)=d(G/H)(h)\wedge dH(g_H), \tag{5.6.11}$$

其中 h 是子流形 gH 的代表元，$g_H\in H$，而

$$dH(g_H)=\omega_{m+1}^H\wedge\cdots\wedge\omega_n^H$$

是 H 的不变体积元. 为使 $d(G/H)(h)$ 确能表示 G/H 上一密度，应满足这样的要求：当 h 在陪集 gH 上流动时，即取 gH 的另外任意元素作为 gH 的代表元时，$d(G/H)(h)$ 保持不变. 换言之，对于一切 $g_H\in H$，当 $h\to hg_H$ 时应有

$$d(G/H)(hg_H)=d(G/H)(h), \ \forall g_H\in H. \tag{5.6.12}$$

将(5.5.68)式 $d_L(Gg_0)=\Delta(g_0)d_LG$ 具体应用于 G 和 H，有

$$d(Gg_H)=\Delta(g_H)dG, \tag{5.6.13}$$

$$d(Hg_H)=\delta(g_H)dH. \tag{5.6.14}$$

在(5.6.11)式中作代换 $g\to gg_H$，注意到 dG 和 dH 的左不变性，有

$$dG(g_H)=d(G/H)(hg_H)\wedge dH(g_H). \tag{5.6.15}$$

将(5.6.13)和(5.6.14)二式代入，得

$$\Delta(g_H)dG=d(G/H)(hg_H)\wedge\delta(g_H)dH. \tag{5.6.16}$$

比较(5.6.11)与(5.6.16)，有

$$\frac{\Delta(g_H)}{\delta(g_H)}=\frac{d(G/H)(hg_H)}{d(G/H)(h)}. \tag{5.6.17}$$

为使(5.6.12)式得以满足，应有 $\Delta(g_H)=\delta(g_H)$. 注意到密度仅考虑其绝对值，于是有下列结论：

定理(Weil 条件) 齐性空间 G/H 上不变密度存在的充要条

件是

$$|\Delta(g_H)|=|\delta(g_H)|,\ \forall g_H\in H. \tag{5.6.18}$$

推论 1 齐性空间 G/H 上不变密度存在的充要条件是

$$|\det \mathrm{ad}_G(g_H)|=|\det \mathrm{ad}_H(g_H)|,\ \forall g_H\in H. \tag{5.6.19}$$

证明 由 (5.5.75) 式可见，条件 (5.6.19) 等价于条件 (5.6.18).

推论 2 若 G/H 上不变密度存在且 G 是幺模群，则 H 也是幺模群.

证明 G 为幺模群，则 $\det \mathrm{ad}_G(g)=1$. 由条件(5.6.19)可知 H 亦为幺模群.

推论 3 若 G 和 H 皆为幺模群，则 G/H 上存在不变密度.

证明 因若 G, H 皆为幺模群，则(5.6.18)式成立.

推论 4 设 G 的闭子群 H 是紧致的，则 G/H 上存在不变密度.

证明 首先证明下述简单的事实：正实数乘法群的紧致子群仅由单位元“1”一个元素组成. 倘若不然，令其含有另一元素 $a\neq 1$，则亦含有 a^m(m 为任何自然数). 由于当 $m\to\infty$ 时，$a^m\to\infty$ 或 $a^m\to 0$. 而这两种情况都不可能出现，因为 a^m 应含于一不包含“0”的有界闭区间中.

现在来证明我们的结论. 由 5.5.5 段之定理 2，映射 $g\mapsto\Delta(g)$ 是 G 到正实数乘法群的一个同态. 因 H 为紧致的，它在 $g\mapsto\Delta(g)$ 或 $g\mapsto\delta(g)$ 下的象应为正实数乘法群的紧致子群，即应是 $\{1\}$. 故 $\Delta(g_H)=\delta(g_H)=1$. 证毕.

5.6.4 H 为正规子群的情形

设 H 为群 G 的子群，且对一切 $g_H\in H$ 及一切 $g\in G$ 有 $gg_Hg^{-1}\in H$，则称 H 为 G 的**正规子群**(normal subgroup)或**不变子群**(invariant subgroup).

现在假定 H 是李群 G 的闭的正规子群. 引入左陪集相乘的定义：

$$(xH)(yH)=(xy)H,$$

则可以证明齐性空间 G/H 成为一李群，称为 G 关于 H 的商群 (quotient group)，仍记作 G/H。

定理 设 H 是李群 G 的闭正规子群，则齐性空间 G/H 上存在关于 G 不变的密度，它就等于商群 G/H 的左不变密度.

证明 设 $d_L(G/H)$ 表示商群 G/H 的左不变密度. 若 $h\in G$ 是左陪集 gH 的代表元，则由 $hg_Hh^{-1}=g_H^*\in H$，有 $hg_H=g_H^*h$. 从而

$$d_L((G/H)g_H)=d_L(g_H^*(G/H))=d_L(G/H),$$

其中后一等式利用了左不变性. 上式表明条件(5.6.12)得到满足，因此 $d_L(G/H)$ 是齐性空间 G/H 的一个不变密度. 证毕.

由本定理及 5.6.3 段定理之推论 2，立即有

推论 设 G 为幺模群，H 是 G 的闭正规子群，则 H 一定是幺模群.

5.6.5 陈省身条件

本段我们来介绍用群的结构常数表达的不变密度存在的条件，这是一个内涵深刻而形式简洁的重要结论.

由(5.6.10)式，

$$\omega_s=\omega_s^*(\xi,\ y,\ d\xi)+\omega_s^H(y,\ dy),\qquad s=m+1,\ \cdots,\ n.$$

群的结构方程($s=m+1,\ \cdots,\ n$ 那一部分)为

$$d\omega_s=\frac{1}{2}\sum_{i,k}C_{ik}^s\omega_i\wedge\omega_k,\qquad s=m+1,\ \cdots,\ n.$$

于上式双方提取不涉及诸 $d\xi_i$ 的项，则有

$$d\omega_s^H=\frac{1}{2}\sum C_{ik}^s\omega_i^H\wedge\omega_k^H,\qquad i,\ k,\ s=m+1,\ \cdots,\ n.$$

可见，当 $i,\ k,\ s=m+1,\ \cdots,\ n$ 时，对于群 G 和对于子群 H 结构常数是一样的. 另一方面，由(5.6.8)式，对 $g_H\in H$，有 $\omega_i(g_H)=0$ ($i=1,\ \cdots,\ m$)(因在子流形 H 上，诸 ξ_i 保持为常数)；由(5.6.10)式，$\omega_i(g_H)=\omega_i^H(g_H)$ ($i=m+1,\ \cdots,\ n$). 因此，由 (5.5.43) 式，

$\overline{\omega}_i(g_H)=-\omega_i(g_H^{-1})\,(i=1,\cdots,m)$(注意 g_H^{-1} 亦属于 H). 所以,利用(5.5.63)式,条件

$$\Delta(g_H)=\delta(g_H) \quad \text{或} \quad \frac{d\Delta}{\Delta}=\frac{d\delta}{\delta}$$

变成
$$\sum_{s=m+1}^{n}\sum_{k=1}^{n}C_{sk}^{k}\overline{\omega}_s=\sum_{s=m+1}^{n}\sum_{k=m+1}^{n}C_{sk}^{k}\overline{\omega}_s,$$

即
$$\sum_{s=m+1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}C_{sk}^{k}\right)\overline{\omega}_s=0.$$

再利用 $\{\overline{\omega}_s\}$ 的线性无关性,便得到

定理(陈省身条件) 齐性空间 G/H 上存在不变密度的充要条件是

$$\sum_{k=1}^{m}C_{sk}^{k}=0, \quad s=m+1,\cdots,n, \tag{5.6.20}$$

其中 C_{sk}^{k} 为群的结构常数.

5.6.6 稳定子群

设 G 可迁地作用微分流形 M. 对于给定的 $p_0\in M$,

$$G_0=\{s\in G\,|\,sp_0=p_0\}$$

是 G 的子群. G_0 称为 p_0 处的合痕群(isotropy group)或称为 G 在 p_0 处的稳定子群(stable subgroup). 群 G_0 闭于 G.

设 G 作用在 M 上. 映射

$$\psi:\ G/G_0\to M,\ xG_0\mapsto xp_0$$

建立了齐性空间 G/G_0 与流形 M 间微分同胚. 今考虑 G/G_0 的代表元之集 $\{y\}$($\{y\}$ 满足以下两点要求: 第一, $\{yG_0\,|\,y\in\{y\}\}$ 包含了 G/G_0 的一切元素; 第二, 若 $y_1\neq y_2$ 则 $y_1G_0\neq y_2G_0$). 这样, ψ 就建立了 $\{y\}$ 与 M 间的连续的一一对应.

今若 G/G_0 上存在关于 G 不变的密度. 由此可诱导出 M 的子集 X 上关于 G 不变的测度:

$$m(X)=\int_{G/G_0}\phi(y)d(G/G_0), \tag{5.6.21}$$

其中
$$\phi(y)=\begin{cases}1, & \text{若 } yp_0\in X,\\ 0, & \text{其余处.}\end{cases}$$

在映射 ψ 之下，对于 $X\subset M$，在 G/G_0 中——从而在 $\{y\}$ 中有对应之集，ϕ 即为此集之特征函数. (5.6.21)式中的密度 $d(G/G_0)$ 亦称为 M 中的点密度，记为 dP.

又若 G, G_0 皆为幺模群，则由(5.5.54)和(5.6.11)二式可见 $dP=d(G/G_0)$ 在映射 $y\mapsto y^{-1}$ 之下不变. 因此(5.6.21)式可写为

$$m(X)=\int_{G/G_0}\phi(y^{-1})dP, \tag{5.6.22}$$

其中

$$\phi(y^{-1})=\begin{cases}1, & 若\ p_0\in yX,\\ 0, & 其余处.\end{cases}$$

§5.7 应用举例——重新认识平面积分几何

本章前六节确立了齐性空间积分几何的理论基础，余下的问题是这个一般性理论的具体应用. 本书最后两章将运用这一理论系统地讨论 E_n 中积分几何. 为了帮助读者更好地理解以下两章的内容，在这一节里我们运用齐性空间积分几何一般理论的观点重新认识 E_2 中积分几何. E_2 中积分几何是比较简单的；唯其简单，我们更易从中洞察问题的实质.

在第三章中已经讲过，E_2 中的运动群 $\mathfrak{M}$ 同构于矩阵

$$u=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & a\\ \sin\varphi & \cos\varphi & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

为元素的矩阵李群，群流形为$(a,\ b,\ \varphi)$三维欧氏空间关于等价关系

$$(a,\ b,\ \varphi+2k\pi)\sim(a,\ b,\ \varphi),\ k\ 为任意整数$$

的商空间. 由形式矩阵

$$\Omega_L=u^{-1}du=\begin{pmatrix}0 & -d\varphi & \cos\varphi da+\sin\varphi\, db\\ d\varphi & 0 & -\sin\varphi\, da+\cos\varphi\, db\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得到一组 Maurer–Cartan 形式：

$$\omega_1=\cos\varphi\, da+\sin\varphi\, db,\ \omega_2=-\sin\varphi\, da+\cos\varphi\, db,\ \omega_3=d\varphi. \tag{5.7.1}$$

由 $d\Omega_L=-\Omega_L\wedge\Omega_L$ 推知平面运动群的结构方程为

$$d\omega_1=-\omega_2\wedge\omega_3,\ d\omega_2=-\omega_3\wedge\omega_1,\ d\omega_3=0. \tag{5.7.2}$$

又，由形式矩阵

$$\Omega_R=du u^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -d\varphi & b\, d\varphi+da\\ d\varphi & 0 & -a\, d\varphi+db\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

可得右不变1形式构成的线性空间的一组基：

$$\omega^1=bd\varphi+da,\ \omega^2=-ad\varphi+db,\ \omega^3=d\varphi. \tag{5.7.3}$$

由(5.7.1)和(5.7.3)二式，有

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3=da\wedge db\wedge d\varphi=\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3.$$

故平面上运动群 $\mathfrak{M}$ 为幺模群，其运动密度为

$$dK=da\wedge db\wedge d\varphi. \tag{5.7.4}$$

直接从结构方程(5.7.2)出发，亦可看出条件

$$\sum_{k=1}^{3}C_{jk}^{k}=0,\quad j=1,\ 2,\ 3$$

是满足的.

直线的密度　令 H_1 表示 $\mathfrak{M}$ 的使直线

$$G(p,\ \theta):\ x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$$

保持不变的子群. E_2 中任一直线 G 可视为一固定直线 G_0 经某个运动 $u\in\mathfrak{M}$ 变换的结果，即 $G=uG_0$. 因 H_1 是致 G 不变之子群，故左陪集 uH_1 中的每个元素皆能将 G_0 变到 G，并且凡是能将 G_0 变到 G 的运动必属于此左陪集. 这样，E_2 中的直线与左陪集 uH_1 相对应，亦即与 $\mathfrak{M}/H_1$ 中元素一一对应. 从而求直线之密度等价于求 $\mathfrak{M}/H_1$ 之密度.

引入坐标变换：

$$p=a\cos\theta+b\sin\theta,\ t=a\sin\theta-b\cos\theta,\ \theta=\varphi+\frac{\pi}{2}. \tag{5.7.5}$$

其逆变换为

$$a=p\cos\theta+t\sin\theta,\ b=p\sin\theta-t\cos\theta,\ \varphi=\theta-\frac{\pi}{2}. \tag{5.7.6}$$

因为在 $\mathfrak{M}/H_1$ 中的元素上 p 和 θ 保持为常数，故相当于(5.6.1)式的那个完全可积的 Pfaff 组等价于

$$dp=0,\ d\theta=0. \tag{5.7.7}$$

由(5.7.5)和(5.7.1)二式，有

$$\begin{aligned}&dp=\cos\theta\, da+\sin\theta\, db=-\sin\varphi\, da+\cos\varphi\, db=\omega_2,\\&d\theta=d\varphi=\omega_3.\end{aligned} \tag{5.7.8}$$

于是(5.7.7)式成为

$$\omega_2=0,\ \omega_3=0. \tag{5.7.9}$$

考虑密度 $$d(\mathfrak{M}/H_1)=\omega_2\wedge\omega_3,$$

由(5.7.2)式，显然可见此密度满足条件：

$$d(d(\mathfrak{M}/H_1))=0.$$

可见 $d(\mathfrak{M}/H_1)$ 是 $\mathfrak{M}/H_1$ 的运动密度，亦即直线 G 的运动密度，简记为 dG. 由(5.7.8)式，

$$dG=dp\wedge d\theta, \tag{5.7.10}$$

或者

$$dG=-\sin\varphi\, da\wedge d\varphi+\cos\varphi\, db\wedge d\varphi. \tag{5.7.11}$$

寻求直线的运动密度的过程有很好的代表性. 其他的几何元素的密度的存在性可作类似讨论.

与一凸域相遇的直线. 设 K 为 E_2 中凸域，周长和面积分别为 L 和 F. 这时有熟知的积分公式：

$$\int_{G\cap K\neq\emptyset} dG=L,\qquad \int_{G\cap K\neq\emptyset}\sigma\, dG=\pi F.$$

这两个公式中的积分域为 $\{G:\ G\cap K\neq\emptyset\}$，即一切与 K 相交的直线 G 之集. 这类样式的问题和公式在积分几何中最具典型性. 现在我们来分析一下，从齐性空间积分几何一般理论的角度观察，所谓 G 与 K 相交是怎么一回事. 原来，在平面上置放一直线 G 和一

凸域 K，运动群 $\mathfrak{M}$ 中就有两个子群与它们相对应．一个是使 G 不变的子群 H_1，一个是使 K 不变的子群 H_2．这样就形成两个齐性空间．G 在平面上的每一位置对应于 H_1 的一个左陪集，而 K 的每一位置对应于 H_2 的一个左陪集．直线 G 与凸域 K 相交正好相应于这样的情况：此时 G 和 K 各自对应的两个左陪集至少含有一公共元．在一般性的讨论中，陈省身称其为关联(incidence)．关联这一概念曾引起 Weil 的重视，并且后来在 Helgason 和 Tits 的工作中找到它的应用．

本章参考文献

[1] 陈省身、陈维桓，《微分几何讲义》，北京大学出版社，1983.

[2] L. A. Santaló, «Integral Geometry and Geometric Probability», Addison-Wesley Publishing Company, 1976.

[3] M. Spivak, «A Comprehensive Introduction to Differential Geometry», Vol. I, Berkeley, 1979.

[4] W. M. Boothby, «An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry», Academic Press, INC., 1975.

第 六 章

E_n中的积分几何

§6.1 E_n中的运动群

6.1.1 运动群及其结构方程

R^n 表示由 n 元有序实数组构成的实线性空间. 设 $x=(x_1, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, \cdots, y_n)$为 R^n 中二点, 按下式引入 x, y 间的距离:

$$d(x, y)=[(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{1/2},$$

则 R^n 成为一度量空间. 这个空间称为 *n* 维欧氏空间, 并记为 E_n.

点的坐标有时表示成 $n\times 1$ 矩阵即列矩阵形式. 所谓 E_n 中一个运动, 是指用形如

$$x'=ax+b,\ aa^T=I \tag{6.1.1}$$

的矩阵方程所表示的从 E_n 到其自身的一个变换, 其中 x 和 x' 为 E_n 中二点, $a=(a_{ij})$和 $b=(b_i)$分别为 $n\times n$ 和 $n\times 1$ 常数矩阵. 又, a^T 表示 a 的转置, I 为 $n\times n$ 单位阵. 条件 $aa^T=I$ 表明 a 为正交阵. 由运动(6.1.1)构成的变换群称为 E_n *中的运动群*, 记为 $\mathfrak{M}$. 若更设 $\det a=+1$, 得到 $\mathfrak{M}$ 的一个子群, 称为特殊运动群. 运动群同构于$(n+1)\times(n+1)$矩阵

$$g=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.1.2}$$

为元素的矩阵群, 其中 a 满足(6.1.1)式中的条件. 矩阵的乘法及

求逆按通常的分块矩阵的相应算法进行:

$$g_2g_1=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2a_1 & a_2b_1+b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{6.1.3}$$

又,记 $g^{-1}=\begin{pmatrix} C & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,则由

$$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Ca & Cb+D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

得 $C=a^{-1}$, $D=-a^{-1}b$,即

$$g^{-1}=\begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.1.4}$$

考虑矩阵

$$g^{-1}dg=\begin{pmatrix} a^{-1}da & a^{-1}db \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.1.5}$$

矩阵(6.1.5)的元皆为左不变1形式,从中选出 $n(n+1)/2$ 个线性无关者便是运动群 $\mathfrak{M}$ 的一组 Maurer-Cartan 形式.

置

$$\Omega_1=a^{-1}da,\quad \Omega_2=a^{-1}db. \tag{6.1.6}$$

取外微分,得

$$\begin{aligned} d\Omega_1&=d(a^{-1})\wedge da=(-a^{-1}daa^{-1})\wedge da=-\Omega_1\wedge\Omega_1,\\ d\Omega_2&=d(a^{-1})\wedge db=(-a^{-1}daa^{-1})\wedge db=-\Omega_1\wedge\Omega_2. \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

运动群的结构方程尽含于矩阵方程(6.1.7)中. 置

$$a=(a_{ij}),\ b=(b_i),\ \Omega_1=(\omega_{ij}),\ \Omega_2=(\omega_i). \tag{6.1.8}$$

由于 a 为正交阵,故 $a^{-1}=(a_{ji})$. 于是(6.1.6)式变成

$$\omega_{ij}=\sum_{h=1}^{n}a_{hi}\,da_{hj},\quad \omega_i=\sum_{h=1}^{n}a_{hi}\,db_h. \tag{6.1.9}$$

而结构方程成为

$$d\omega_{ij}=-\sum_{h=1}^{n}\omega_{ih}\wedge\omega_{hj},\quad d\omega_i=\sum_{h=1}^{n}\omega_{ih}\wedge\omega_h. \tag{6.1.10}$$

为了赋予 ω_{ij}, ω_i 以几何意义,可以引用 E. Cartan 的活动标架法. 设 $(p_0; e_1^0, \cdots, e_n^0)\equiv(p_0; e_i^0)$ 为正交标准化固定标架,它由一

定点 p_0 及两两正交的 n 个单位向量构成. 对于每一个运动 $g\in\mathfrak{M}$, 对应着一个活动标架 $(p;\ e_i)=g(p_0;\ e_i^0)$, 它是固定标架经 g 变换的结果; 反之, 每一正交标准化标架 $(p;\ e_i)$ 对应着一个满足关系 $(p;\ e_i)=g(p_0;\ e_i^0)$ 的运动 g.

取原点 $(0,\ \cdots,\ 0)$ 作为 p_0, 并设诸 e_i^0 是坐标向量:

$$e_1^0=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T,\ e_2^0=(0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T,\ \cdots,$$
$$e_n^0=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1)^T.$$

若引入"向量矩阵"

$$e^0=(e_1^0\cdots e_n^0)\quad 和\quad e=(e_1\cdots e_n)$$

(e^0 是由诸 e_i^0"拼"成的, 即 e^0 的第 i 列是 e_i^0 的元; e 之意义类似), 则活动标架与固定标架之间的关系可以写成

$$p-p_0=e^0b,\ e=e^0a. \tag{6.1.11}$$

从而得到活动标架的微分方程:

$$\begin{aligned} dp&=e^0\,db=ea^{-1}\,db=e\Omega_2,\\ de&=e^0\,da=ea^{-1}\,da=e\Omega_1, \end{aligned} \tag{6.1.12}$$

亦即

$$dp=\sum_{i=1}^n\omega_ie_i;\ de_i=\sum_{j=1}^n\omega_{ji}e_j,\quad i=1,\ \cdots,\ n. \tag{6.1.13}$$

利用关系 $e_i\cdot e_j=\delta_j^i$, $de_i\cdot e_j+e_i\cdot de_j=0$, 得到

$$\omega_i=dp\cdot e_i,\ \omega_{ji}=de_i\cdot e_j,\ \omega_{ji}+\omega_{ij}=0. \tag{6.1.14}$$

其中最后一个等式表明 $\Omega_1=(\omega_{ij})$ 是反称的, 而前二式则显示出 ω_i 和 ω_{ij} 之几何意义.

6.1.2 运动群及其子群的不变体积元

平移群 变换

$$x'=x+b \tag{6.1.15}$$

称为 E_n 中的平移, 其中 $b=(b_1,\ \cdots,\ b_n)^T$. 由一切平移构成的变换群称为平移群, 记为 $\mathfrak{T}$. $\mathfrak{T}\subset\mathfrak{M}$ 是运动群 $\mathfrak{M}$ 的子群, 维数为 n. $db_1,\ \cdots,\ db_n$ (或 n 个线性无关的带常系数的线性组合) 是平移群的一组 Maurer-Cartan 形式. 因 $\mathfrak{T}$ 为可换子群, 具有不变体积元如下:

$$d\mathfrak{T}=db_1\wedge\cdots\wedge db_n. \tag{6.1.16}$$

绕一点旋转的旋转群 设 a 为正交阵. 由变换

$$x'=ax \tag{6.1.17}$$

构成的变换群称为绕原点 O 旋转的旋转群, 记为 $\mathfrak{M}_{[O]}$. 此群同构于正交群 $O(n)$. 从条件 $aa^T=I$ 可知, 对一切 i, h 有 $a_{ih}^2\leqslant 1$. 于是 $\mathfrak{M}_{[O]}$ 的群流形是有界闭的. 从而 $\mathfrak{M}_{[O]}$ 为紧致群. 根据 5.5.5 段定理 2 的推论 2, 可知群 $\mathfrak{M}_{[O]}$ 是幺模群, 从而存在不变体积元. 因为 (ω_{ij}) 是反称的, 故 $\{\omega_{ij}|i<j\}$ 是 $\mathfrak{M}_{[O]}$ 的一组 Maurer-Cartan 形式. 从而其不变体积元为

$$d\mathfrak{M}_{[O]}=\bigwedge_{i<j}\omega_{ij},\ i,\ j=1,\ \cdots,\ n. \tag{6.1.18}$$

由(5.5.43)式可知 $d\mathfrak{M}_{[O]}(a)=d\mathfrak{M}_{[O]}(a^{-1})$, 即不变体积元 $d\mathfrak{M}_{[O]}$ 是逆不变的.

现在我们来计算群 $\mathfrak{M}_{[O]}$ 的总体积. 对于绕原点 O 的旋转, 向量 e_i 的终端在 U_{n-1}(球心在原点 O 的 $(n-1)$ 维单位球面)上变动. 内积 $de_i\cdot e_j=\omega_{ji}$ 等于 U_{n-1} 上在 e_i 的终端处沿 e_j 方向的弧元. 因此 U_{n-1} 在 e_1 的终端处之 $(n-1)$ 维体积元 du_{n-1} 应为

$$du_{n-1}=\omega_{21}\wedge\omega_{31}\wedge\cdots\wedge\omega_{n1}. \tag{6.1.19}$$

同理, 在过原点而垂直于 e_1 的 r 维平面(E_n 中的 r 维线性空间叫 r 维平面; $r=1$ 简称"直线", $r=n-1$ 为超平面)中, 以原点为球心的 $(n-2)$ 维单位球面记为 U_{n-2}, 那么 U_{n-2} 在 e_2 的终端处的 $(n-2)$ 维体积元 du_{n-2} 应为

$$du_{n-2}=\omega_{32}\wedge\omega_{42}\wedge\cdots\wedge\omega_{n2}. \tag{6.1.20}$$

其余依此类推, 由(6.1.18)式, 最后可归纳出 $d\mathfrak{M}_{[O]}$ 的表达式:

$$d\mathfrak{M}_{[O]}=du_{n-1}\wedge du_{n-2}\wedge\cdots\wedge du_1. \tag{6.1.21}$$

注意, 依上述程序进行讨论, 即先考虑 U_{n-1} 在 e_1 的终端处的体积元, 然后考虑 U_{n-2} 在 e_2 的终端处的体积元等等, 至最后的向量 e_n 时, 有两种可能的选择, 即 e_n 或 $-e_n$, 它们当中的任一个均可与 e_1, $\cdots$, e_{n-1} 一起组成 E_n 中的活动标架. 因此之故, 取(6.1.21)式之积分, 得群 $\mathfrak{M}_{[O]}$ 的总体积为

$$m(\mathfrak{M}_{[O]})=2O_{n-1}\cdots O_1,\tag{6.1.22}$$

其中 O_i 表示 i 维单位球面的 i 维体积.

注 1 我们始终只考虑非负密度. 因此, 利用 $\omega_{ji}=-\omega_{ij}$, $d\mathfrak{M}_{[O]}$ 亦可表示为

$$d\mathfrak{M}_{[O]}=\bigwedge_{i>j}\omega_{ij}.\tag{6.1.23}$$

同时,根据同样的理由,在表示密度的外积表达式中诸外积因子的次序可随意排列.

注 2 若我们考虑的是特殊旋转群,这时群的总体积应为

$$m(\mathfrak{M}_{[O]})_{(\text{特})}=O_{n-1}\cdots O_1.\tag{6.1.24}$$

运动群 因为 $\mathfrak{M}_{[O]}$ 和 $\mathfrak{T}$ 都是幺模群,故运动群 $\mathfrak{M}$ 亦然,其不变体积元可以写作

$$d\mathfrak{M}=d\mathfrak{M}_{[O]}\wedge d\mathfrak{T}.\tag{6.1.25}$$

设运动由活动标架$(p;\ e_i)$所确定. 由(6.1.16)和(6.1.21)二式,并注意到 E_n 在 p 点之体积元

$$dp=db_1\wedge\cdots\wedge db_n,\tag{6.1.26}$$

则有

$$\begin{aligned}d\mathfrak{M}&=dp\wedge d\mathfrak{M}_{[O]}\\&=dp\wedge du_{n-1}\wedge\cdots\wedge du_1\end{aligned}\tag{6.1.27}$$

绕固定的 q 维平面旋转的旋转群 设 L_q 为 E_n 中固定的 q 维平面. E_n 中致 L_q 之所有点保持不变的那些运动形成 $\mathfrak{M}$ 的一子群, 称为绕固定 q 维平面旋转的旋转群, 记为 $\mathfrak{M}_{[q]}$. 设 L_{n-q} 为正交于 L_q 的$(n-q)$维平面, 则群 $\mathfrak{M}_{[q]}$ 同构于欧氏空间 L_{n-q} 中绕点 $O_1=L_q\cap L_{n-q}$ 旋转的旋转群 $\mathfrak{M}_{[O]}^{(n-q)}$($O_1$ 一般不重合于原 E_n 中原点 O,但可取作欧氏空间 L_{n-q} 的原点). 于是 $\mathfrak{M}_{[q]}$ 是幺模群, 运用(6.1.22)式(以 $n-q$ 代替 n), 得其总体积

$$m(\mathfrak{M}_{[q]})=2O_{n-q-1}\cdots O_1.\tag{6.1.28}$$

若限于考虑特殊旋转群,则有

$$m(\mathfrak{M}_{[q]})_{(\text{特})}=O_{n-q-1}\cdots O_1.\tag{6.1.29}$$

§6.2 E_n中线性空间的密度

6.2.1 r 维平面的运动密度

现在我们讨论 r 维平面关于运动群 $\mathfrak{M}$ 不变的密度.

存在性 设 L_r^0 为 E_n 中固定的 r 维平面. $\mathfrak{M}$ 中保持 L_r^0 不变的运动构成一群 H_r, 它是 $\mathfrak{M}$ 的闭子群. 设 $g\in\mathfrak{M}$, 则产生 H_r 的一个(左)陪集 gH_r. 对每个这样的陪集 gH_r, 有 r 维平面 $L_r=gL_r^0$ 与之相对应; 反之, 对于每个 r 维平面 L_r, 则存在一陪集 gH_r 与之相对应, 其中 g 为致 $gL_r^0=L_r$ 之运动. 这样, E_n 中的 r 维平面遂与齐性空间 $\mathfrak{M}/H_r$ 的元素之间建立了一一对应. 于是寻求 r 维平面的不变密度等价于寻求齐性空间 $\mathfrak{M}/H_r$ 的不变密度. 注意, 上一节所讲的绕 L_r^0 旋转的旋转群 $\mathfrak{M}_{[r]}$ 与刚才所定义的致 L_r^0 不变的群 H_r 是不同的. 前者由使 L_r^0 的每一点不变的运动组成, 而后者仅要求 L_r^0 作为一个整体保持不变. 若以 $\mathfrak{M}^{(r)}$ 表示 L_r^0 中的运动群, 则显然可见

$$H_r=\mathfrak{M}_{[r]}\times\mathfrak{M}^{(r)}. \tag{6.2.1}$$

因为 $\mathfrak{M}_{[r]}$, $\mathfrak{M}^{(r)}$ 皆为幺模群, 故其直积 H_r 亦然. 从而齐性空间 $\mathfrak{M}/H_r$ 存在不变密度, 此不变密度称为 r 维平面 L_r 的不变密度或运动密度, 记为 dL_r.

dL_r 的表达式 令$(p;\ e_1, \cdots, e_n)$是 E_n 中的活动标架, 并假定 L_r^0 由 $e_1, \cdots, e_r$ 所张成. 由于要求保持 L_r^0 不变, 因此 p 和 $e_1, \cdots, e_r$ 只能在 L_r^0 中变化. 由此推知, dp 和 $de_i(i=1, \cdots, r)$均可表示为 $e_1, \cdots, e_r$ 的线性组合. 于是有

$$\begin{aligned}&dp\cdot e_\alpha=0,\ \alpha=r+1, \cdots, n,\\&de_i\cdot e_\beta=0,\ \beta=r+1, \cdots, n; i=1, \cdots, r.\end{aligned} \tag{6.2.2}$$

即

$$\omega_\alpha=0,\ \omega_{i\beta}=0, \tag{6.2.3}$$

$$\alpha,\ \beta=r+1, \cdots, n; i=1, \cdots, r. \tag{6.2.4}$$

从而得到$\mathfrak{M}/H_r$ 的不变密度(亦即r维平面的运动密度)的表达式:

$$dL_r = d(\mathfrak{M}/H_r) = \bigwedge_{i,\beta} \omega_{i\beta} \bigwedge_{\alpha} \omega_\alpha, \qquad (6.2.5)$$

其中指标的变域与(6.2.4)式相同.

例如,对于 $n=2$ 和 $r=1$, 由(6.2.5)式立即可得 E_2 中直线的运动密度

$$dL_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 = (de_1 \cdot e_2) \wedge (dp \cdot e_2).$$

设 p 的坐标为 (a, b), $e_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $e_2 = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$. 则有 $\omega_{12} = d\varphi$, $\omega_2 = -\sin\varphi\, da + \cos\varphi\, db$. 于是,

$$dL_1 = -\sin\varphi\, d\varphi \wedge da + \cos\varphi\, d\varphi \wedge db,$$

此式与(5.7.11)式一致(符号可不计).

6.2.2 包含固定 q 维平面的 r 维平面的运动密度

设 L_q^0 是 E_n 中固定的 q 维平面. 若 $r>q$, 我们希望求出包含 L_q^0 的 r 维平面 L_r 的不变密度. 假定 L_r^0 为包含 L_q^0 的任一 r 维平面, 并设 L_q^0 由点 p 和 $e_1, \cdots, e_q$ 所决定, 而 L_q^0 和 $e_{q+1}, \cdots, e_r$ 合起来决定 L_r^0. 如前, 使 L_q^0 保持不变的运动构成的群记为 H_q, 而保持 L_q^0 不变同时还保持 L_r^0 不变的运动构成的群记为 $H_{r[q]}$. 显然 $H_{r[q]}$ 是 H_q 的闭子群. 倘齐性空间 $H_q/H_{r[q]}$ 存在不变密度,那么它便是我们所求的包含固定 q 维平面的 r 维平面的运动密度. 由于 $e_{q+1}, \cdots, e_r$ 在 L_r^0 中变化,不难看出,齐性空间 $H_q/H_{r[q]}$ 由以下 Pfaff 组所确定:

$$\omega_{hi} = 0, \ i = q+1, \cdots, r; \ h = r+1, \cdots, n. \qquad (6.2.6)$$

考虑密度

$$dL_{r[q]} = \bigwedge_{h,i} \omega_{hi}, \ i = q+1, \cdots, r; \ h = r+1, \cdots, n. \qquad (6.2.7)$$

利用结构方程及关系

$$\omega_{hi} = 0, \ i = 1, \cdots, q; \ h = q+1, \cdots, n$$

立即可以验证 $d(dL_{r[q]}) = 0$ 成立. 故 (6.2.7) 式是包含固定 q 维平面的 r 维平面的运动密度的表达式.

当 $q=0$ 时 L_q^0 退化为一定点, 这是一个重要的特款. 由(6.2.7)式,我们得到包含定点的 r 维平面的不变密度:

$$dL_{r[O]}=\bigwedge_{h,i}\omega_{hi},\ i=1,\ \cdots,\ r;\ h=r+1,\ \cdots,\ n. \qquad (6.2.8)$$

这个 $dL_{r[O]}$ 也就是 Grassmann 流形 $G_{r,n-r}$ 的不变体积元. 根据(6.2.8)式及关系 $\omega_{ji}+\omega_{ij}=0$, 易知

$$dL_{r[O]}=dL_{n-r[O]}. \qquad (6.2.9)$$

6.2.3 Grassmann 流形的体积

利用(6.2.8)式可以导出 Grassmann 流形的体积公式.

定理 1 E_n 中过定点的未定向 r 维平面的总测度(即 Grassmann 流形 $G_{r,n-r}$ 的体积)为

$$m(G_{r,n-r})=m(G_{n-r,r})=\int_{G_{r,n-r}}dL_{r[O]}=\frac{O_{n-1}\cdots O_{n-r}}{O_{r-1}\cdots O_1O_0}, \qquad (6.2.10)$$

其中 O_i 表示 i 维单位球面的面积.

证明 令 $L_{n-1[O]}$ 是过活动标架 $(p;\ e_i)$ 之原点 p 且垂直于 e_1 的 $(n-1)$ 维平面, 并设 $L_{r[O]}$ 由 p 及 $e_1,\ \cdots,\ e_r$ 所张成, 则 $L_{r[O]}\cap L_{n-1[O]}$ 是由 $e_2,\ \cdots,\ e_r$ 决定的 $(r-1)$ 维平面, 即 $L_{r-1[O]}$. 作为 $(n-1)$ 维空间 $L_{n-1[O]}$ 中的 $L_{r-1[O]}$, 其密度可据(6.2.8)式推出:

$$dL_{r-1[O]}^{(n-1)}=\bigwedge_{h,i}\omega_{hi},\ i=2,\ \cdots,\ r;\ h=r+1,\ \cdots,\ n. \qquad (6.2.11)$$

由(6.2.8)和(6.2.11)二式, 并利用 U_{n-1} 在 e_1 终端处体积元的表示式(见(6.1.19)式)

$$du_{n-1}=\omega_{21}\wedge\omega_{31}\wedge\cdots\wedge\omega_{n1},$$

我们有

$$dL_{r[O]}\wedge\omega_{21}\wedge\omega_{31}\wedge\cdots\wedge\omega_{r1}=dL_{r-1[O]}^{(n-1)}\wedge du_{n-1}. \qquad (6.2.12)$$

以 du_{r-1} 表示 $L_{r[O]}$ 中 $(r-1)$ 维单位球面的体积元, 则上式成为

$$dL_{r[O]}\wedge du_{r-1}=dL_{r-1[O]}^{(n-1)}\wedge du_{n-1}. \qquad (6.2.13)$$

以 $dL_{r-1[O]}^{(n-1)}$ 取代 $dL_{r[O]}$、同时以 du_{r-2} 取代 du_{r-1}, 应用此式则有

$$dL_{r-1[O]}^{(n-1)}\wedge du_{r-2}=dL_{r-2[O]}^{(n-2)}\wedge du_{n-2}. \qquad (6.2.14)$$

于(6.2.13)式两边外乘 du_{r-2} 并利用(6.2.14)式, 有(不计符号)

$$\begin{aligned}dL_{r[O]}\wedge du_{r-1}\wedge du_{r-2}&=dL_{r-1[O]}^{(n-1)}\wedge du_{r-2}\wedge du_{n-1}\\&=dL_{r-2[O]}^{(n-2)}\wedge du_{n-2}\wedge du_{n-1},\end{aligned}$$

两边再外乘 du_{r-3} 等等，将此过程继续下去可归纳出：

$$dL_{r[O]}\wedge du_{r-1}\wedge\cdots\wedge du_{r-q}=dL_{r-q[O]}^{(n-q)}\wedge du_{n-1}\wedge\cdots\wedge du_{n-q}. \tag{6.2.15}$$

当 $q=r-1$ 时，因 $dL_{1[O]}^{(n-r+1)}=du_{n-r}$，故有

$$dL_{r[O]}\wedge du_{r-1}\wedge\cdots\wedge du_1=du_{n-1}\wedge\cdots\wedge du_{n-r}. \tag{6.2.16}$$

取上式之积分，并注意当我们考虑未定向的 $L_{r[O]}$ 时每个 du_k 的积分结果均应除以 O_0，这样便得到(6.2.10)式．证毕．

另一证法　刚才的证明，关键在于导出(6.2.16)式．我们可以更直接地导出此式．由(6.2.8)式，有

$$\begin{aligned}dL_{r[O]}=&(\omega_{r+1,1}\wedge\cdots\wedge\omega_{n1})\wedge(\omega_{r+1,2}\wedge\cdots\wedge\omega_{n2})\wedge\cdots\\&\wedge(\omega_{r+1,r-1}\wedge\cdots\wedge\omega_{n,r-1})\wedge(\omega_{r+1,r}\wedge\cdots\wedge\omega_{nr}),\end{aligned}$$

上式两边同时外乘

$$(\omega_{21}\wedge\cdots\wedge\omega_{r1})\wedge(\omega_{32}\wedge\cdots\wedge\omega_{r2})\wedge\cdots\wedge(\omega_{r,r-1}),$$

则立即导致(6.2.16)式．第一个证法实质上与此相同，只是细致地解释了运算的几何意义，而理解这些几何意义的细节对于熟练掌握活动标架法是有益的．

$L_{r[q]}$ 的总测度公式可由(6.2.10)式导出．

定理2　E_n 中包含固定的 q 维平面的未定向 r 维平面的总测度为

$$m(H_q/H_{r[q]})=\int_{\text{Total}}dL_{r[q]}=\frac{O_{n-q-1}O_{n-q-2}\cdots O_{n-r}}{O_{r-q-1}O_{r-q-2}\cdots O_1O_0}. \tag{6.2.17}$$

证明　令 $L_{n-q[O]}$ 是垂直于 L_q^0 的 $(n-q)$ 维平面，并以 O_1 表示点 $L_{n-q[O]}\cap L_q^0$．每一个 $L_{r[q]}$ 可由交集 $L_{r[q]}\cap L_{n-q[O]}$ 所决定，而此交集是过 O_1 的 $(r-q)$ 维平面．因此，E_n 中 $L_{r[q]}$ 的总测度等于 $L_{n-q[O]}$ 中的 $L_{r-q[O]}$ 的总测度．后者可利用(6.2.10)式(以 $n-q$ 代替 n、以 $r-q$ 代替 r)求出，这便是(6.2.17)式．

6.2.4　E_n 中 r 维平面的密度之另一形式

设 $L_{n-r[O]}$ 是过定点 O 且垂直于 L_r 的 $(n-r)$ 维平面，$p=L_r\cap$

$L_{n-r[O]}$. 距离 $\overline{Op}$ 记为 ρ. 选取满足下述条件的正交标准化标架 $(p; e_i)$: $e_1, \cdots, e_r$ 张成 L_r; e_{r+1} 与 $\overrightarrow{Op}$ 方向一致(此项要求是合理的，由于 $\overrightarrow{Op}$ 含于垂直于 L_r 的 $L_{n-r[O]}$ 之中)。1 形式 $\omega_{r+h}=dp\cdot e_{r+h}$ 是 $L_{n-r[O]}$ 在点 p 沿方向 e_{r+h} 的弧元. 于是 $L_{n-r[O]}$ 在 p 点的体积元 $d\sigma_{n-r}$ 为

$$d\sigma_{n-r}=\omega_{r+1}\wedge\omega_{r+2}\wedge\cdots\wedge\omega_n. \tag{6.2.18}$$

由(6.2.5)、(6.2.8)、(6.2.9)及上式，有

$$dL_r=d\sigma_{n-r}\wedge dL_{n-r[O]}. \tag{6.2.19}$$

例 1 $r=1$. $L_{n-1[O]}$ 是过定点 O 而垂直于 L_1 的超平面. $p=L_1\cap L_{n-1[O]}$. 这时 $dL_{n-1[O]}=dL_{1[O]}$, 等于 U_{n-1} 在平行于 L_1 的 e_1 终端处的体积元 du_{n-1}. $d\sigma_{n-1}$ 是 $L_{n-1[O]}$ 在 p 点处体积元. 于是

$$dL_1=d\sigma_{n-1}\wedge du_{n-1}. \tag{6.2.20}$$

例 2 $r=n-1$. ρ 是定点 O 到 $p=L_{n-1}\cap L_{1[O]}$ 的距离，此时也就是定点 O 到超平面 L_{n-1} 的距离，故 $d\sigma_1=d\rho$. $dL_{1[O]}$ 为垂直于 L_{n-1} 的 e_n 终端处的体积元. 于是

$$dL_{n-1}=d\rho\wedge du_{n-1}. \tag{6.2.21}$$

6.2.5 线性空间偶 (L_{n-1}, L^*_{n-1}) 的运动密度

设 L_{n-1} 和 L^*_{n-1} 是 E_n 中二超曲面. 它们的交是 $(n-2)$ 维平面，记为 L_{n-2}. ϕ_1, ϕ_2 分别是 L_{n-1}, L^*_{n-1} 的法向量在 L_{n-2} 的正交平面上的角度. 我们希望用 dL_{n-2}, $d\phi_1$ 及 $d\phi_2$ 表示线性空间偶 (L_{n-1}, L^*_{n-1}) 的密度 $dL_{n-1}\wedge dL^*_{n-1}$. 为此我们设计满足某些条件之正交标准化标架:

标架 I: $(p; e_1, \cdots, e_n)$,

标架 II: $(p; e_1, \cdots, e_{n-2}, e^*_{n-1}, e^*_n)$,

标架 III: $(p; e_1, \cdots, e_{n-2}, a, b)$.

满足条件:

1° L_{n-2} 由 p 和 $e_1, \cdots, e_{n-2}$ 所决定;

2° e_{n-1} 包含于 L_{n-1} 中，e_n 是 L_{n-1} 的单位法向量;

3° e^*_{n-1} 包含于 L^*_{n-1} 中，e^*_n 是 L^*_{n-1} 的单位法向量;

4° a, b 是 L_{n-2} 的正交平面上的单位常向量(a, b 只与 L_{n-2} 有关，而与 L_{n-1}, L^*_{n-1} 绕 L_{n-2} 的转动无关).

由(6.2.5)和(6.2.4)及(6.1.14)诸式，有

$$dL_{n-1}=\bigwedge_i(de_i\cdot e_n)\wedge(dp\cdot e_n),\ i=1,\ \cdots,\ n-1;$$

$$dL^*_{n-1}=\bigwedge_i(de_i\cdot e^*_n)\wedge(de^*_{n-1}\cdot e^*_n)\wedge(dp\cdot e^*_n),\ i=1,\ \cdots,\ n-2;$$

$$dL_{n-2}=\bigwedge_i(de_i\cdot a)\wedge(de_i\cdot b)\wedge(dp\cdot a)\wedge(dp\cdot b),$$

$$i=1,\ \cdots,\ n-2. \tag{6.2.22}$$

若 ϕ_1, ϕ_2 依次是 e_n, e^*_n 与 b 的夹角，则有

$$e_{n-1}=\cos\phi_1 a-\sin\phi_1 b,\quad e_n=\sin\phi_1 a+\cos\phi_1 b,$$

$$e^*_{n-1}=\cos\phi_2 a-\sin\phi_2 b,\quad e^*_n=\sin\phi_2 a+\cos\phi_2 b.$$

于是

$$\begin{aligned}&(de_i\cdot e_n)\wedge(de_i\cdot e^*_n)\\&=[(de_i\cdot a)\sin\phi_1+(de_i\cdot b)\cos\phi_1]\\&\quad\wedge[(de_i\cdot a)\sin\phi_2+(de_i\cdot b)\cos\phi_2]\\&=\sin(\phi_1-\phi_2)(de_i\cdot a)\wedge(de_i\cdot b),\end{aligned}$$

$$de_{n-1}\cdot e_n=-d\phi_1+da\cdot b,$$

$$de^*_{n-1}\cdot e^*_n=-d\phi_2+da\cdot b,$$

$$(dp\cdot e_n)\wedge(dp\cdot e^*_n)=\sin(\phi_1-\phi_2)(dp\cdot a)\wedge(dp\cdot b).$$

由(6.2.22)式及以上这些关系，便有

$$\begin{aligned}&dL_{n-1}\wedge dL^*_{n-1}\\&=\bigwedge_{i=1}^{n-2}(de_i\cdot e_n)\wedge(de_i\cdot e^*_n)\wedge(de_{n-1}\cdot e_n)\wedge(de^*_{n-1}\cdot e^*_n)\\&\quad\wedge(dp\cdot e_n)\wedge(dp\cdot e^*_n)\\&=\sin^{n-1}(\phi_1-\phi_2)\bigwedge_{i=1}^{n-2}(de_i\cdot a)\wedge(de_i\cdot b)\wedge(dp\cdot a)\wedge(dp\cdot b)\\&\quad\wedge(-d\phi_1+da\cdot b)\wedge(-d\phi_2+da\cdot b)\\&=\sin^{n-1}(\phi_1-\phi_2)dL_{n-2}\\&\quad\wedge[d\phi_1\wedge d\phi_2+(d\phi_1+d\phi_2)\wedge(da\cdot b)].\end{aligned}$$

由于 a, b 是 L_{n-2} 的正交平面上的常向量，故 $dL_{n-2}\wedge(da\cdot b)=0$，从而

$$dL_{n-1}\wedge dL^*_{n-1}=\sin^{n-1}(\phi_1-\phi_2)d\phi_1\wedge d\phi_2\wedge dL_{n-2}.$$

(6.2.23)

此式还可推广到线性空间偶$(L_r,\ L_s)$的情形，从略.

6.2.6 线性空间偶$(L_r,\ L^{(r)}_{i+1})$的运动密度

设L_r为E_n中r维平面，$L^{(r)}_{i+1}$是r维线性空间L_r中的$i+1$维平面$(i+1\leqslant r)$. 我们来求线性空间偶$(L_r,\ L^{(r)}_{i+1})$的不变密度. 选取活动标架$(p;e_1,\ \cdots,\ e_n)$，使得p及$e_1,\ \cdots,\ e_{i+1}$张成$L^{(r)}_{i+1}$而p及$e_1,\ \cdots,\ e_r$张成L_r. 根据(6.2.5)式，L_r中的$(i+1)$维平面的密度是

$$dL^{(r)}_{i+1}=\bigwedge_{j,\beta}\omega_{j\beta}\bigwedge_{\alpha}\omega_\alpha,\ j=1,\ \cdots,\ i+1;\ \alpha,\ \beta=i+2,\ \cdots,\ r.$$

(6.2.24)

作为E_n中的$(i+1)$维平面的密度直接由(6.2.5)式给出:

$$dL_{i+1}=\bigwedge_{j,m}\omega_{jm}\bigwedge_{h}\omega_h,\ m,\ h=i+2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ \cdots,\ i+1.$$

(6.2.25)

另一方面，由(6.2.7)式可得包含$L^{(r)}_{i+1}$的r维平面的密度:

$$dL_{r[i+1]}=\bigwedge_{h,\alpha}\omega_{h\alpha},\ h=r+1,\ \cdots,\ n;\ \alpha=i+2,\ \cdots,\ r.$$

(6.2.26)

利用(6.2.5)及刚才导出的三个密度式，我们有

$$dL^{(r)}_{i+1}\wedge dL^*_r=dL_{r[i+1]}\wedge dL_{i+1}.\qquad(6.2.27)$$

(6.2.27)式左方出现的r维平面看作是定向的，这是因为对于每个未定向的L_r相应于两个绕$L^{(r)}_{i+1}$的$L_{r[i+1]}$.

另外，若考虑E_n中过定点的线性空间，则有

$$dL^{(r)}_{i+1[0]}\wedge dL_{r[0]}=dL_{r[i+1]}\wedge dL_{i+1[0]}.\qquad(6.2.28)$$

6.2.7 点组的密度公式

设$p,\ p_1,\ \cdots,\ p_r$是L_r中的$r+1$个点，p是活动标架$(p;\ e_1,\ \cdots,\ e_n)$的原点，L_r由p及$e_1,\ \cdots,\ e_r$所决定. 显然，向量p_i-p可用$e_i(i=1,\ \cdots,\ r)$的线性组合表示:

$$p_i - p = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij} e_j.$$

于是 $$dp_i - dp = \sum_{j=1}^{r} d\lambda_{ij} \cdot e_j + \sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij} de_j, \ i=1, \cdots, r.$$

从而 $$dp_i \cdot e_\alpha - dp \cdot e_\alpha = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij} e_\alpha \cdot de_j, \ \alpha = r+1, \cdots, n,$$

即 $$dp_i \cdot e_\alpha = \omega_\alpha + \sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij} \omega_{\alpha j}, \ \alpha = r+1, \cdots, n.$$

作外积，得到

$$\begin{aligned}(dp \cdot e_\alpha) \bigwedge_{i=1}^{r} (dp_i \cdot e_\alpha) &= \omega_\alpha \bigwedge_{i=1}^{r} \left(\omega_\alpha + \sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij} \omega_{\alpha j}\right) \\ &= \omega_\alpha \bigwedge_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij} \omega_{\alpha j}\right) \\ &= \det(\lambda_{ij}) \omega_\alpha \bigwedge_{j} \omega_{\alpha j}, \qquad (6.2.29)\end{aligned}$$

$$i, j = 1, \cdots, r.$$

若以 S 表示顶点为含于 L_r 中的 $p, p_1, \cdots, p_r$ 的单形之体积，则

$$r! S = \det(\lambda_{ij}). \qquad (6.2.30)$$

对(6.2.29)式，分别令 $\alpha = r+1, \cdots, n$, 并将得到的$(n-r)$个式子作外积便有

$$\bigwedge_{\alpha} (dp \cdot e_\alpha) \bigwedge_{i, \alpha} (dp_i \cdot e_\alpha) = (r! S)^{n-r} dL_r,$$

$$i = 1, \cdots, r; \alpha = r+1, \cdots, n. \qquad (6.2.31)$$

另一方面，E_n 在 p_i 处的体积元(记为 $dP_i(E_n)$)为

$$dP_i(E_n) = \bigwedge_{h} (dp_i \cdot e_h), \ h = 1, \cdots, n.$$

L_r 在 p_i 处的体积元(记为 $dP_i(L_r)$)为

$$dP_i(L_r) = \bigwedge_{j} (dp_i \cdot e_j), \ j = 1, \cdots, r.$$

于是，用 $$\bigwedge_{h} (dp \cdot e_h) \bigwedge_{i, j} (dp_i \cdot e_j), \ h, i, j = 1, \cdots, r$$

外乘(6.2.31)式两边，便得到点组密度的 Blaschke 公式：

$$\begin{aligned}&dP(E_n) \wedge dP_1(E_n) \wedge \cdots \wedge dP_r(E_n) \\ &\quad = (r! S)^{n-r} dP(L_r) \wedge dP_1(L_r) \wedge \cdots \wedge dP_r(L_r) \wedge dL_r.\end{aligned}$$

(6.2.32)

点偶的密度公式是此式的重要特殊情形. 设 p_1, p_2 是 E_n 中直线 L_1 上二点, t_1, t_2 为此二点在 L_1 上的坐标. 这时有

$$dP_1(L_1)=dt_1,\ dP_2(L_1)=dt_2,\ S=t_2-t_1.$$

从而(6.2.32)式变成

$$dP_1(E_n)\wedge dP_2(E_n)=|t_2-t_1|^{n-1}dt_1\wedge dt_2\wedge dL_1. \tag{6.2.33}$$

§6.3 凸集与均质积分

6.3.1 凸集的均质积分

E_n 中凸集及有关的基本概念是 E_2 和 E_3 中相应概念的自然推广. 设 K 为 E_n 中一集, 若当 A, $B\in K$ 时则连接 A, B 二点的线段也属于 K, 就称 K 为 E_n 中凸集. 具有非空内部之凸集称为凸体. 今后我们仅限于讨论有界闭凸体. 凸体 K 之边界 ∂K 称为凸曲面. 含有凸集 K 的点而不能将 K 的任何两点分离的超平面, 称为凸集 K(或凸曲面 ∂K)的*支持超平面*(简称*支持面*).

本段介绍凸集的均质积分概念. 这是一个十分深刻的概念, 它与凸集的许多重要性质有密切联系.

我们从凸集的投影说起. 在 E_2 中, 凸集在直线上的投影是一个区间(1 维凸集), 此区间的长度(1 维体积)是凸集的宽度; 考虑各个方向的宽度得到所谓宽度函数, 而宽度函数从 0 到 π 的积分是凸集的周长. 推广到高维情形, 我们不仅可以考虑凸集在直线(即 L_1)上的投影, 而且可以考虑凸集在维数从 1 到 $(n-1)$ 的平面上的投影. 设 K 为 E_n 中凸集, O 为定点. $L_{n-r[O]}$ 表示过 O 点的任一 $(n-r)$ 维平面. 过 K 的每点作垂直于 $L_{n-r[O]}$ 的 r 维平面, 这些 r 维平面与 $L_{n-r[O]}$ 的交点构成凸集 K'_{n-r}. K'_{n-r} 叫做 K 到 $L_{n-r[O]}$ 上的正交投影. K'_{n-r} 的 $(n-r)$ 维体积记为 $V(K'_{n-r})$. 因为过定点的所有 $(n-r)$ 维平面 $L_{n-r[O]}$ 构成 Grassmann 流形 $G_{n-r,r}$, 所以我们很自然地引入如下的积分:

$$I_r(K)=\int_{G_{n-r,r}} V(K'_{n-r})\,dL_{n-r[O]}=\int_{G_{r,n-r}} V(K'_{n-r})dL_{r[O]}.$$

(6.3.1)

此式对 $r=1, \cdots, n-1$ 给出了 $I_r(K)$ 之定义. 另外, 补充规定

$$I_0(K)=V(K)(K\text{ 之体积}). \qquad (6.3.2)$$

利用 Grassmann 流形体积公式(6.2.10), 得到投影体积 $V(K'_{n-r})$ 的积分平均值

$$E(V(K'_{n-r}))=\frac{I_r(K)}{m(G_{n-r,r})}=\frac{O_{r-1}\cdots O_1 O_0}{O_{n-1}\cdots O_{n-r}} I_r(K).$$

(6.3.3)

所谓均质积分是借助于 $I_r(K)$ 来定义的. 在正式叙述这个定义之前, 我们先介绍 $I_r(K)$ 的一个重要性质.

引理 1 下述密度关系式成立:

$$dL_{n-1[O]}\wedge dL^{(n-1)}_{r-1[O]}\wedge dL^{(n-1)}_{r[r-1]}$$
$$=dL_{r[O]}\wedge dL^{(r)}_{r-1[O]}\wedge dL_{n-1[r]}. \qquad (6.3.4)$$

证明 回顾(6.2.28)式:

$$dL^{(r)}_{i+1[O]}\wedge dL^{*}_{r[O]}=dL_{r[i+1]}\wedge dL_{i+1[O]}. \qquad (6.3.5)$$

在此式中令 $r\to(n-1)$、$(i+1)\to r$, 则有

$$dL^{(n-1)}_{r[O]}\wedge dL^{*}_{n-1[O]}=dL_{n-1[r]}\wedge dL_{r[O]}. \qquad (6.3.6)$$

仍在(6.3.5)式中, 若以$(n-1)$作为 n、以$(r-1)$作为$(i+1)$, 则有

$$dL^{(r)}_{r-1[O]}\wedge dL^{*(n-1)}_{r[O]}=dL^{(n-1)}_{r[r-1]}\wedge dL^{(n-1)}_{r-1[O]}. \qquad (6.3.7)$$

于(6.3.6)式两边同时外乘以 $dL^{(r)}_{r-1[O]}$, 其结果右方与(6.3.4)式右方相同, 而左方为

$$dL^{(r)}_{r-1[O]}\wedge dL^{(n-1)}_{r[O]}\wedge dL^{*}_{n-1[O]}.$$

若将 $L_{n-1[O]}$ 改作未定向的而同时将 $L^{(n-1)}_{r[O]}$ 改作定向的则上式之值不变, 在此基础上再运用(6.3.7)式, 则有

$$dL^{(r)}_{r-1[O]}\wedge dL^{(n-1)}_{r[O]}\wedge dL^{*}_{n-1[O]}$$
$$=dL^{(r)}_{r-1[O]}\wedge dL^{*(n-1)}_{r[O]}\wedge dL_{n-1[O]}$$
$$=dL^{(n-1)}_{r[r-1]}\wedge dL^{(n-1)}_{r-1[O]}\wedge dL_{n-1[O]},$$

此与(6.3.4)式左方相同(再次提醒一下, 在密度表示式中外积因子的次序是无关紧要的). 证毕.

引理2 设 K 为 E_n 中凸集, K'_{n-1} 为 K 在 $L_{n-1[O]}$ 上的正交投影. 作为$(n-1)$维空间 $L_{n-1[O]}$ 中的凸集 K'_{n-1}, 它在 $L^{(n-1)}_{(n-1)-(r-1)[O]}$ 上投影体积的积分平均值记为 $I'_{r-1}(K'_{n-1})$. 则有

$$I_r(K)=\frac{2}{O_{r-1}}\int_{\frac{1}{2}U_{n-1}} I'_{r-1}(K'_{n-1})du_{n-1}, \qquad (6.3.8)$$

其中 $\frac{1}{2}U_{n-1}$ 表示$(n-1)$维单位球面的一半, 即 $G_{1,n-1}$.

证明 于(6.3.4)式两边同乘以 $V(K'_{n-r})$, 得

$$V(K'_{n-r})dL_{n-1[O]}\wedge dL^{(n-1)}_{r-1[O]}\wedge dL^{(n-1)}_{r[r-1]}$$
$$=V(K'_{n-r})dL_{r[O]}\wedge dL^{(r)}_{r-1[O]}\wedge dL_{n-1[r]}.$$

现在我们来考虑上式双方的积分.

先看左方的积分. 由于 K'_{n-r} 也可以看作是 K'_{n-1} 在 $L_{n-r[O]}$ 上的投影, 亦即 K'_{n-1} 在 $L^{(n-1)}_{(n-1)-(r-1)[O]}$ 上的投影. 因此有

$$\int_{G_{r-1,[(n-1)-(r-1)]}} V(K'_{n-r})dL^{(n-1)}_{r-1[O]}=I'_{r-1}(K'_{n-1}).$$

$dL^{(n-1)}_{r[r-1]}$ 的积分即 $L^{(n-1)}_{r[r-1]}$ 之总测度, 可利用(6.2.17)式算出:

$$\int_{\text{Total}} dL^{(n-1)}_{r[r-1]}=\frac{1}{2}O_{n-r-1}.$$

又, $dL_{n-1[O]}=du_{n-1}$ ($(n-1)$ 维单位球面 U_{n-1} 之体积元). 综上所述, 可见左方积分应为

$$\frac{1}{2}O_{n-r-1}\int_{\frac{1}{2}U_{n-1}} I'_{r-1}(K'_{n-1})du_{n-1}. \qquad (6.3.9)$$

另一方面, 右方的积分可考虑如下: 由 I_r 之定义有

$$\int_{G_{r,n-r}} V(K'_{n-r})dL_{r[O]}=I_r(K).$$

而 $dL^{(r)}_{r-1[O]}$, $dL_{n-1[r]}$ 的积分均可由(6.2.17)式算出,

$$\int_{\text{Total}} dL^{(r)}_{r-1[O]}=\frac{1}{2}O_{r-1},$$

$$\int_{\text{Total}} dL_{n-1[r]}=\frac{1}{2}O_{n-r-1}.$$

从而右方积分结果为

$$\frac{1}{4}O_{r-1}\cdot O_{n-r-1}I_r(K). \tag{6.3.10}$$

由(6.3.9)和(6.3.10)，便得到(6.3.8)式. 证毕.

定义 E_n 中凸集 K 的均质积分 $W_r(K)$ 规定如下:

1° 对 $r=1, \cdots, n-1$,

$$W_r(K)=\frac{(n-r)O_{n-1}}{nO_{n-r-1}}E(V(K'_{n-r})), \tag{6.3.11}$$

或(由(6.3.3)式)

$$W_r(K)=\frac{(n-r)O_{r-1}\cdots O_1O_0}{nO_{n-2}\cdots O_{n-r}O_{n-r-1}}I_r(K); \tag{6.3.12}$$

2° 对 $r=0$,

$$W_0(K)=I_0(K)=V(K); \tag{6.3.13}$$

3° 对 $r=n$,

$$W_n(K)=O_{n-1}/n. \tag{6.3.14}$$

此均质积分 (quermassintegrale) 概念是由 Minkowski 首先引进的，在凸体论和积分几何中十分有用. 定义的 2° 和 3° 两款是为了今后统一表述公式的方便而作的人为的规定. 从定义的第 1° 款看，$W_r(K)$ 本质上与 $E(V(K'_{n-r}))$ 或 $I_r(K)$ 一致，仅相差一个常数因子.

定理(Kubota 公式) 设 K 为 E_n 中凸集，K'_{n-1} 为 K 在 $L_{n-1[0]}$ 上的投影. $W'_{r-1}(K'_{n-1})$ 是 $(n-1)$ 维空间 $L_{n-1[0]}$ 中的凸集 K'_{n-1} 的均质积分. 则有

$$W_r(K)=\frac{2(n-1)}{nO_{n-2}}\int_{\frac{1}{2}U_{n-1}}W'_{r-1}(K'_{n-1})du_{n-1}. \tag{6.3.15}$$

证明 由 $W_r(K)$ 的定义(6.3.12)式，有

$$I_r(K)=\frac{nO_{n-2}\cdots O_{n-r}O_{n-r-1}}{(n-r)O_{r-1}\cdots O_1O_0}W_r(K),$$

$$I'_{r-1}(K'_{n-1})=\frac{(n-1)O_{(n-1)-2}\cdots O_{(n-1)-(r-1)-1}}{[(n-1)-(r-1)]O_{(r-1)-1}\cdots O_1O_0}W'_{r-1}(K'_{n-1}).$$

将它们代入(6.3.8)式便得到 (6.3.15) 式. 又，可直接验证公式(6.3.15)对于 $r=n$ 也成立. 总之，对于 $r=1, \cdots, n$ 公式(6.3.15)成立.

在(6.3.11)式中取 $r=n-1$，得 K 之平均宽度

$$E(V(K_1'))=(2n/O_{n-1})W_{n-1}(K). \qquad (6.3.16)$$

6.3.2 Cauchy 公式

首先假定 K 是 E_n 中凸多面体区域. 设 f_i 是 ∂K 之一个面的面积，此面在 $L_{n-1[O]}$ 上投影的面积记为 f_i'. 于是

$$f_i'=|\cos\theta_i|f_i,$$

其中 θ_i 为此面（作为 ∂K 的部分）的外法线与 $L_{n-1[O]}$ 的法线 u_{n-1} 间的夹角. 一切这样的投影面积之和是面 $V(K_{n-1}')$ 的 2 倍，即

$$2V(K_{n-1}')=\sum_{i=1}^{m}|\cos\theta_i|f_i, \qquad (6.3.17)$$

其中 m 为 ∂K 的面的数目.

于(6.3.17)式两边同乘以 du_{n-1}，然后计算双方在 $\frac{1}{2}U_{n-1}$ 上的积分. 由于

$$\int_{\frac{1}{2}U_{n-1}}|\cos\theta_i|du_{n-1}=O_{n-2}/(n-1),$$

即 $\frac{1}{2}U_{n-1}$ 在其边界（大圆）所在的超平面上的投影——$(n-1)$维单位球体的体积. 故右方的积分为

$$\int_{\frac{1}{2}U_{n-1}}\sum_{1}^{m}|\cos\theta_i|f_i\,du_{n-1}=\frac{O_{n-2}}{n-1}\sum_{1}^{m}f_i=\frac{O_{n-2}}{n-1}F,$$

其中 F 为 ∂K 的表面积($(n-1)$维体积). 于是有

$$2\int_{\frac{1}{2}U_{n-1}}V(K_{n-1}')du_{n-1}=\frac{O_{n-2}}{n-1}F. \qquad (6.3.18)$$

再利用(6.3.1)和(6.3.12)二式，有

$$F=\frac{2(n-1)}{O_{n-2}}\int_{\frac{1}{2}U_{n-1}}V(K_{n-1}')du_{n-1}=\frac{2(n-1)}{O_{n-2}}I_1(K)$$

$$=\frac{2(n-1)}{O_{n-2}}\cdot\frac{nO_{n-2}}{(n-1)O_0}W_1(K)=nW_1(K). \qquad (6.3.19)$$

这就是关于凸多面体的 Cauchy 公式. 由于任何凸体可用凸多面

体序列逼近，故(6.3.19)式对任意凸体亦成立．公式(6.3.19)或(6.3.18)是2维情形周长公式的自然推广．当$n=3$时，公式(6.3.18)呈下述形式：

$$2\int_{\frac{1}{2}U_2} F_u\, du_2 = \frac{O_1}{2} F,$$

即

$$F = \frac{1}{\pi}\int_{U_2} F_u\, du_2. \tag{6.3.20}$$

从而有

$$F = \frac{1}{\pi}\cdot \bar{F}_u \int_{U_2} du_2 = \frac{1}{\pi}\cdot \bar{F}_u \cdot 4\pi,$$

换言之，F_u之期望值$E(F_u)=\bar{F}_u=F/4$.

6.3.3 平行凸集 Steiner 公式

如平面凸集一样，可以定义任意维空间中凸集之平行凸集．设K为E_n中凸集．以K中每一点为球心、以常数ρ为半径作闭球体，这些球体的并集称为K的距离为ρ的平行凸集，记为K_ρ. K_ρ的边界∂K_ρ称为∂K的距离为ρ的平行曲面．

关于平行凸集之体积，有著名的 Steiner 公式．

定理(Steiner 公式)　设K为E_n中凸集，K_ρ为K的距离为ρ的平行凸集，则有

$$V(K_\rho) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} W_i(K)\rho^i. \tag{6.3.21}$$

证明　用数学归纳法证之．当$n=1$时，由(6.3.13)和(6.3.14)二式，有

$$W_0(K) = I_0(K) = V(K),$$
$$W_1(K) = O_{n-1}/n = O_0 = 2.$$

于是(6.3.21)式成为

$$V(K_\rho) = V(K) + 2\rho.$$

注意到在$n=1$的场合，$V(K)$即区间之长，而K_ρ即原区间各向两边延伸距离ρ所成之区间．这表明(6.3.21)式对于$n=1$成立．

假设公式(6.3.21)对于$(n-1)$维空间中凸集成立．K在$(n$

-1) 维平面 L_{n-1} 上的投影 K' 是$(n-1)$维凸集，因此对 K' 可应用(6.3.21)式，即

$$V(K'_\rho)=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}W'_i(K')\rho^i, \qquad (6.3.22)$$

其中 K'_ρ 表示 K' 的在 L_{n-1} 中距离为 ρ 的平行凸集．于上式两边同乘 du_{n-1}，并在整个 U_{n-1} 上积分．由(6.3.18)式，左方积分为

$$\int_{U_{n-1}}V(K'_\rho)\,du_{n-1}=\frac{O_{n-2}}{n-1}F(K_\rho).$$

右方积分可利用 Kubota 公式(6.3.15)算出，得到

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\rho^i\int_{U_{n-1}}W'_i(K')du_{n-1}=\sum\binom{n-1}{i}\rho^i\frac{nO_{n-2}}{n-1}W_{i+1}(K).$$

从而有

$$F(K_\rho)=\sum_{i=0}^{n-1}n\binom{n-1}{i}W_{i+1}(K)\rho^i. \qquad (6.3.23)$$

另一方面，直接由平行凸集的定义可知

$$V(K_\rho)=V(K)+\int_0^\rho F(K_\mu)d\mu. \qquad (6.3.24)$$

将(6.3.23)式代入(6.3.24)式，有

$$V(K_\rho)=V(K)+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n}{i+1}\binom{n-1}{i}W_{i+1}(K)\rho^{i+1}.$$

在上式中，以 $W_0(K)$代替 $V(K)$，同时令 $(i+1)\to i$，则变成

$$V(K_\rho)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}W_i(K)\rho^i.$$

这表明公式(6.3.21)对 n 维凸集 K 亦成立．证毕．

公式(6.3.21)给出了用诸 $W_i(K)$表达 $V(K_\rho)$即 $W_0(K_\rho)$ 的公式．作为此公式的推论，不难得到用诸 $W_j(K)$表达 $W_i(K_\rho)$($i=0, 1, \cdots, n$)的公式．

推论 我们有

$$W_i(K_\rho)=\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}W_{i+j}(K)\rho^j. \qquad (6.3.25)$$

证明 K_ρ 的距离为 α 的平行凸集与 K 的距离为$(\rho+\alpha)$的平

行凸集是一致的，故有

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}W_i(K_\rho)\alpha^i=\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}W_h(K)(\rho+\alpha)^h$$
$$=\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}W_h(K)\sum_{i=0}^{n}\binom{h}{i}\rho^{h-i}\alpha^i.$$

比较 α 的同次幂的系数(并以 j 代替 $h-i$)便得到(6.3.25)式.

6.3.4 $W_i'(K_{n-r}')$的平均值

设 K 是 E_n 中凸集, K_{n-r}' 是 K 在$(n-r)$维平面 $L_{n-r[O]}$ 上的正交投影. 根据 $W_r(K)$之定义((6.3.11)式), K_{n-r}' 的体积的平均值可用 $W_r(K)$表示:

$$E(V(K_{n-r}'))=\frac{nO_{n-r-1}}{(n-r)O_{n-1}}W_r(K). \qquad (6.3.26)$$

与6.3.1段中表述 Kubota 定理时所用过的记号一致, 我们以 $W_i'(K_{n-r}')$表示$(n-r)$维空间 $L_{n-r[O]}$ 中的 $(n-r)$ 维凸集 K_{n-r}' 的均质积分. 由定义式 (6.3.13), $V(K_{n-r}')$ 即 $W_0'(K_{n-r}')$. 于是 (6.3.26) 式给出了 $W_0'(K_{n-r}')$ 的平均值. 本段目的在于寻求 $W_i'(K_{n-r}')$的平均值.

将(6.3.11)式用于 K 的平行凸集 K_ρ, 有

$$W_r(K_\rho)=\frac{(n-r)O_{r-1}\cdots O_0}{nO_{n-2}\cdots O_{n-r-1}}\int_{G_{r,n-r}}V((K_\rho)_{n-r}')dL_{r[O]}.$$
$$(6.3.27)$$

由(6.3.25)式,上式左方为

$$W_r(K_\rho)=\sum_{j=0}^{n-r}\binom{n-r}{j}W_{r+j}(K)\cdot\rho^j. \qquad (6.3.28)$$

至于右方, 注意到 $(K_\rho)_{n-r}'$ 全同于 $(K_{n-r}')_\rho$, 将 Steiner 公式(6.3.21)应用于$(n-r)$维凸集$(K_{n-r}')_\rho$, 则有

$$V((K_\rho)_{n-r}')=V((K_{n-r}')_\rho)=\sum_{j=0}^{n-r}\binom{n-r}{j}W_j'(K_{n-r}')\rho^j.$$
$$(6.3.29)$$

将(6.3.28)和(6.3.29)二式代入(6.3.27)式, 得到

$$\sum_{j=0}^{n-r}\binom{n-r}{j}W_{r+j}(K)\rho^j$$
$$=\frac{(n-r)O_{r-1}\cdots O_0}{nO_{n-2}\cdots O_{n-r-1}}\sum_{j=0}^{n-r}\binom{n-r}{j}\rho^j\int_{G_{r,n-r}}W'_j(K'_{n-r})dL_{r[0]}.$$

比较上式同次幂的系数，有

$$\int_{G_{r,n-r}}W'_j(K'_{n-r})dL_{r[0]}=\frac{nO_{n-2}\cdots O_{n-r-1}}{(n-r)O_{r-1}\cdots O_0}W_{r+j}(K). \tag{6.3.30}$$

上式对于 $0\leqslant j\leqslant n-r\leqslant n-1$ 成立．至此，我们的目的已经达到(上式除以 $m(G_{r,n-r})$ 即得 $W'_j(K'_{n-r})$ 之积分平均值)．

当 $j=0$，(6.3.30)即(6.3.26)式．

当 $j=1$，(6.3.30)式将变成下述形状：

$$\int_{G_{r,n-r}}F(K'_{n-r})\,dL_{r[0]}=\frac{nO_{n-2}\cdots O_{n-r-1}}{O_{r-1}\cdots O_0}W_{r+1}(K), \tag{6.3.31}$$

其中 $F(K'_{n-r})$ 表示 K'_{n-r} 的表面积($\partial K'_{n-r}$ 的 $(n-r-1)$ 维体积)．事实上，将(6.3.19)式应用于 $(n-r)$ 维凸集 K'_{n-r}，则有

$$W'_1(K'_{n-r})=F(K'_{n-r})/(n-r). \tag{6.3.32}$$

此式代入(6.3.30)式立即得(6.3.31)式．

§6.4 平均曲率积分

6.4.1 E_n 中超曲面的平均曲率积分

E_3 中 C^2 类曲面在每点有两个主方向和相应的两个主曲率 $\varkappa_1$，$\varkappa_2$．由 $\varkappa_1$ 和 $\varkappa_2$ 可定义曲面在该点的 Gauss 曲率 K 和平均曲率 H：

$$K=\varkappa_1\cdot\varkappa_2,\ H=\frac{1}{2}(\varkappa_1+\varkappa_2).$$

值得注意的是 $\varkappa_1+\varkappa_2$，$\varkappa_1\varkappa_2$ 都是变元 $\varkappa_1$，$\varkappa_2$ 的初等对称函数．对于 E_n 中超曲面有如下的定义：

定义 设 Σ 为 E_n 中 C^2 类超曲面．$\varkappa_1$，$\varkappa_2$，$\cdots$，$\varkappa_{n-1}$ 是 Σ 的

$n-1$ 个主曲率(函数). Σ 的第 i 个平均曲率积分(记为 $M_r(\Sigma)$)定义为

$$M_r(\Sigma)=\binom{n-1}{r}^{-1}\int_{\Sigma}\{\varkappa_{i_1},\ \varkappa_{i_2},\ \cdots,\ \varkappa_{i_r}\}d\sigma, \tag{6.4.1}$$

$$r=1,\ \cdots,\ n-1,$$

其中 $d\sigma$ 表示 Σ 的面积元, $\{\varkappa_{i_1},\ \varkappa_{i_2},\ \cdots,\ \varkappa_{i_r}\}$ 为主曲率的第 r 阶初等对称函数. 另外,补充规定

$$M_0(\Sigma)=F(\text{即 }\Sigma\text{ 的面积}) \tag{6.4.2}$$

与 E_3 中的 $\varkappa_1\varkappa_2$ 类似, 乘积 $\varkappa_1\cdots\varkappa_{n-1}$ 称为曲面 Σ 的 Gauss-Kronecker 曲率, 它与曲面的球面象的面积元 du_{n-1} 的联系是

$$\varkappa_1\cdots\varkappa_{n-1}d\sigma=du_{n-1}, \tag{6.4.3}$$

其中 $d\sigma$ 为曲面的面积元.

$R_i=1/\varkappa_i(i=1,\ \cdots,\ n-1)$ 称为 Σ 的主曲率半径. 从而平均曲率积分可用主曲率半径定义如下:

$$M_r(\Sigma)=\binom{n-1}{r}^{-1}\int_{U_{n-1}}\{R_{i_1},\ \cdots,\ R_{i_{n-r-1}}\}du_{n-1}, \tag{6.4.4}$$

其中 $\{R_{i_1},\ \cdots,\ R_{i_{n-r-1}}\}$ 为 $R_{i_1},\ \cdots,\ R_{i_{n-1}}$ 的第$(n-1)-r$ 阶初等对称函数.

若 Σ 是 C^2 类紧致定向超曲面, 则 $M_{n-1}(\Sigma)$ 等于 Σ 之球面象的总体积, 即 $M_{n-1}(\Sigma)=O_{n-1}\cdot d$, 其中 d 是球面象的映射度. 又, Σ 的 Euler-Poincaré 示性数 $\chi(\Sigma)$ 与 d 的联系为 $\chi(\Sigma)=d+(-1)^{n-1}d$. 因此, 当$(n-1)$为偶数时, 有

$$M_{n-1}(\Sigma)=\frac{1}{2}O_{n-1}\chi(\Sigma)\quad((n-1)\text{为偶}). \tag{6.4.5}$$

若 Σ 是 E_n 中区域 D 的边界 ∂D. 由于区域的 Euler-Poincaré 示性数等于其边界的球面象的映射度, 即 $\chi(D)=d$, d 为 ∂D 的球面象的映射度. 因此, 由 $M_{n-1}(\partial D)=O_{n-1}\cdot d$, 有

$$M_{n-1}(\partial D)=O_{n-1}\chi(D); \tag{6.4.6}$$

由 $\chi(\partial D)=d+(-1)^{n-1}d$, 则有

$$\chi(\partial D)=[1-(-1)^n]\chi(D). \tag{6.4.7}$$

特别说来，若 D 为拓扑球(例如 D 为凸体便属于这种情形)，$\chi(D)=1$，于是(6.4.6)、(6.4.7)二式便成为

$$M_{n-1}(\partial D)=O_{n-1}, \tag{6.4.8}$$

$$\chi(\partial D)=1-(-1)^n. \tag{6.4.9}$$

6.4.2 平均曲率积分与均质积分之间的联系

本段将导出凸集 K 的均质积分与 K 的边界 ∂K 的平均曲率积分之间的关系.

首先仍设凸集 K 的边界 ∂K 为 C^2 类超曲面. ∂K 的主曲率半径记为 $R_i(i=1, \cdots, n-1)$. 设 K_ρ 是 K 的距离为 ρ 的平行凸集. K_ρ 的边界 ∂K_ρ 的主曲率半径显然为 $R_i+\rho(i=1, \cdots, n-1)$. 由(6.4.2)式，有

$$d\sigma_\rho=(R_1+\rho)\cdots(R_{n-1}+\rho)du_{n-1}, \tag{6.4.10}$$

其中 $d\sigma_\rho$ 为 ∂K_ρ 的面积元. 因此 K_ρ 的表面积为

$$\begin{aligned}F(K_\rho)&=\int_{\partial K_\rho}d\sigma_\rho=\int_{U_{n-1}}(R_1+\rho)\cdots(R_{n-1}+\rho)du_{n-1}\\&=\sum_{r=0}^{n-1}\int_{U_{n-1}}\{R_{i_1}, \cdots, R_{i_{n-r-1}}\}\rho^r du_{n-1}\\&=\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}M_r(\partial K)\rho^r,\end{aligned} \tag{6.4.11}$$

其中最后一个等式用了(6.4.4)式.

另一方面，K_ρ 的体积为

$$V(K_\rho)=V(K)+\int_0^\rho F(K_\mu)d\mu.$$

将(6.4.11)式代入上式，得到

$$V(K_\rho)=V(K)+\sum_{r=0}^{n-1}\frac{\rho^{r+1}}{r+1}\binom{n-1}{r}M_r(\partial K). \tag{6.4.12}$$

用此式与 Steiner 公式(6.3.21)相比较，便有

$$M_r(\partial K)=nW_{r+1}(K), \quad r=0, 1, \cdots, n-1. \tag{6.4.13}$$

(6.4.13)式当 $r=0$ 时成立的理由来自(6.3.19)、(6.4.2)二式. 公式(6.4.13)建立了 ∂K 的平均曲率积分与 K 的均质积分之间的

联系. 这是一个很重要的公式.

我们是在 $\partial K\in C^2$ 的前提下导出这一结论的. 按照我们前面给出的 M_r 的定义,必须假定 $\partial K\in C^2$. 但是, $W_j(K)$ 对于任何凸集 K 都有定义,因此我们可借助于(6.4.13)式,对任意凸集 K 给出 $M_r(\partial K)$ 的定义($r=0, 1, \cdots, n-1$). 当 $\partial K\in C^2$ 时, 此定义与前述定义一致.

反过来,(6.4.13)式可用来计算 $W_{r+1}(K)$. 当 ∂K 没有足够的光滑性时,可首先计算 $M_r(S_\alpha)$, 其中 S_α 为 C^2 类超曲面族且当 $\alpha\to 0$ 时 S_α 逼近 ∂K,然后可算出 $W_{r+1}(K)$:

$$W_{r+1}(K)=\frac{1}{n}\lim_{\alpha\to 0}M_r(S_\alpha). \tag{6.4.14}$$

另外, 利用(6.4.13)和(6.3.25)二式, 易知 ∂K_ρ 和 ∂K 的平均曲率积分之间有下列关系:

$$M_i(\partial K_\rho)=\sum_{j=0}^{n-i-1}\binom{n-i-1}{j}M_{i+j}(\partial K)\rho^j,\ i=0, 1, \cdots, n-1. \tag{6.4.15}$$

6.4.3 一些具体结果

以下是一些具体的计算结果.

(1) 半径为 R 的球体

$$W_r(\text{球})=(O_{n-1}/n)R^{n-r},\ r=0, 1, \cdots, n. \tag{6.4.16}$$

证明 由(6.4.4)式,有

$$M_{r-1}(\partial K)=\binom{n-1}{r-1}^{-1}\int_{U_{n-1}}\{R_{i_1}, \cdots, R_{i_{n-1}}\}du_{n-1}$$

$$=\binom{n-1}{r-1}^{-1}\int_{U_{n-1}}\binom{n-1}{r-1}R^{n-r}du_{n-1}=O_{n-1}R^{n-r}.$$

由(6.4.13)式,得到

$$W_r(K)=\frac{O_{n-1}}{n}R^{n-r},\ r=2, \cdots, n$$

由(6.3.13)和(6.3.19)二式可知上式对 $r=0, 1$ 也成立.

(2) 棱为 a_i($i=1, \cdots, n$)的 n 维长方体

$$W_r(n\text{维长方体})=\frac{O_{r-1}}{r\binom{n}{r}}\{a_{i_1},\ \cdots,\ a_{i_{n-r}}\},\qquad(6.4.17)$$

其中 $\{a_{i_1},\ \cdots,\ a_{i_{n-r}}\}$ 表示 $a_i(i=1,\ \cdots,\ n)$ 的第$(n-r)$ 阶初等对称函数.

特款　对于边长为 a 的 n 维正立方体,有

$$W_r(\text{立方体})=(O_{r-1}/r)a^{n-r}.\qquad(6.4.18)$$

(3) 长度为 s 的线段

对 $n\geqslant 2$,有

$$W_i=0(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-2),W_{n-1}=\frac{O_{n-2}}{n(n-1)}s,\ W_n=\frac{O_{n-1}}{n}.\qquad(6.4.19)$$

对 $n=1$,有

$$W_0=s,\ W_1=2.\qquad(6.4.20)$$

(4) 凸柱体

首先介绍一个较一般性的结果. 设 A_p, B_{n-p} 是分别被包含于相互正交的二平面 L_p, L_{n-p} 之中的凸集. 点集

$$\{x+y\,|\,x\in A_p,\ y\in B_{n-p}\}$$

必是凸集,记为 $A_p\times B_{n-p}$,称为 A_p 与 B_{n-p} 的 Minkowski 和集. 可以证明

$$\begin{aligned}W_i&(A_p\times B_{n-p})\\&=\frac{O_{i-1}}{i\binom{n}{i}}\sum_{\nu=1}^{i-1}\frac{\nu(i-\nu)}{O_{\nu-1}O_{i-\nu-1}}\binom{p}{\nu}\binom{n-p}{i-\nu}W_\nu^{(p)}(A_p)W_{i-\nu}^{(n-p)}(B_{n-p})\\&\quad+\frac{1}{\binom{n}{i}}\left[\binom{n-p}{i}W_0^{(p)}(A_p)W_i^{(n-p)}(B_{n-p})\right.\\&\quad\left.+\binom{p}{i}W_i^{(p)}(A_p)W_0^{(n-p)}(B_{n-p})\right],\end{aligned}\qquad(6.4.21)$$

其中 $W_\nu^{(p)}(A_p)$表示 L_p 中凸集 A_p 的第 ν 个均质积分, $W_{i-\nu}^{(n-p)}(B_{n-p})$ 可作类似理解.

柱体可视为Minkowski和集的特款. 取$p=1$, 从而A_1作为L_1中之凸集必然是一线段. 设其长度为h. 又, 设B_{n-1}是半径为a的$(n-1)$维球体. 此时$A_1\times B_{n-1}$恰好是一柱体. 由(6.4.21)式, 当$i\geqslant 2$时, 有

$$W_i(\text{柱体})=\frac{O_{n-2}}{n(n-1)}\left[\frac{(i-1)O_{i-1}}{O_{i-2}}a^{n-i}+(n-i)a^{n-i-1}h\right]; \tag{6.4.22}$$

当$i=0$和$i=1$时, 有

$$W_0=\frac{O_{n-2}}{n-1}a^{n-1}h,\ W_1=\frac{O_{n-2}}{n(n-1)}(2a^{n-1}+(n-1)a^{n-2}h). \tag{6.4.23}$$

(5) 旋转椭球体

设K为半轴等于a和λa的旋转椭球体, a为赤道半径. 我们有

$$W_r(K)=(O_{n-1}/n)\lambda^{r+1}a^{n-r}F[(n+1)/2,\ r/2,\ n/2;1-\lambda^2], \tag{6.4.24}$$

其中F为超越几何函数.

以上几个结果引自Hadwiger的书«Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie»(Springer, Berlin, 1957).

(6) E_3中凸体的平均曲率积分

$n=3$的情形较简单, 也较常用到. 设K为E_3中凸体, 其平均曲率积分为M_0, M_1及M_2. 其中$M_0=F$(即∂K的面积), $M_2=4\pi$. 而$M_1=M$, 即通常微分几何中所指的平均曲率积分. 值得特别予以关注的就是这个M. 对于$n=3$和$r=1$的情形, 由(6.4.13)和(6.3.31)二式, 有

$$M=\frac{1}{2\pi}\int_{U_2}L_u du_2, \tag{6.4.25}$$

其中L_u表示K在垂直于u_2的平面上的投影之周长. 若利用(6.4.13)和(6.3.16)二式, 则有

$$M=\frac{1}{2}\int_{U_2}\Delta du_2, \tag{6.4.26}$$

其中Δ表示K沿u_2方向的宽度, 即垂直于u_2的K之二平行支

持面间的距离. 由(6.4.25)和(6.4.26)二式立即得到 L_u、Δ 的平均值与 M 的关系:

$$E(L_u)=M/2,\ E(\Delta)=M/2\pi. \tag{6.4.27}$$

下面列出 E_3 中的几个具体结果.

1° 凸多面体

设 K 为 E_3 中凸多面体, 棱长为 a_i, 相应的二面角为 α_i($i=1, \cdots, m$). 则有

$$M(\partial K)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(\pi-\alpha_i)a_i. \tag{6.4.28}$$

证明 设 K_ρ 为 K 的距离为 ρ 的平行凸集, 则有

$$\begin{aligned}M(\partial K_\rho)&=\sum_i\frac{1}{2}\int_{C_i}\left(\frac{1}{\rho}+0\right)d\sigma+\int_{C_\rho}\frac{1}{\rho}d\sigma\\&=\sum_i\frac{1}{2\rho}\cdot\rho(\pi-\alpha_i)a_i+\frac{1}{\rho}\cdot 4\pi\rho^2\\&=\frac{1}{2}\sum_i(\pi-\alpha_i)a_i+4\pi\rho,\end{aligned}$$

其中 C_i 表示底半径为 ρ、高为 a_i 的圆柱面的中心角等于 $(\pi-\alpha_i)$ 的那一部分, 而 C_ρ 表示半径为 ρ 的球面. 令 $\rho\to 0$ 取上式之极限便得到(6.4.28)式. 上述演算相当于以 ∂K_ρ 逼近 ∂K. 但 ∂K_ρ 并不属于 C^2 类. 因此,一个严密的处理尚须辅之以更细致的光滑逼近过程,此处从略.

2° 正柱体

先考虑底为凸多边形、高为 h 的正棱柱. 设凸多边形的诸边之长为 b_i, 与母线一致的那些棱处的二面角记为 β_i, 则由(6.4.28)式有

$$\begin{aligned}M&=2\cdot\frac{1}{2}\sum_i\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)b_i+\frac{1}{2}\sum_i(\pi-\beta_i)h\\&=\frac{1}{2}\pi\sum b_i+\pi h.\end{aligned} \tag{6.4.29}$$

底为周长等于 L 的凸域、高为 h 的正柱体, 是正棱柱体的极限情形:

$$M=\frac{1}{2}\pi L+\pi h. \tag{6.4.30}$$

特别是对正圆柱体有

$$M=\pi^2 r+\pi h, \tag{6.4.31}$$

其中 r 为底圆半径. 在(6.4.31)式中令 $r\to 0$, 得到 E_3 中长度为 h 的线段的 M,

$$M=\pi h. \tag{6.4.32}$$

在同一式子中令 $h\to 0$, 得到周长为 L 的平面凸域(作为 E_3 中之平坦凸体)的平均曲率积分,

$$M=\frac{1}{2}\pi L. \tag{6.4.33}$$

6.4.4 平坦凸体的平均曲率积分

设 K^r 是 r 维平面 $L_r\subset E_n$ 中凸体, 并假定其边界(L_r 中($r-1$)维流形)为二次可微.

以下引入两种记号. 当我们把 ∂K^r 视为 L_r 中凸曲面时, 以 $M_q^{(r)}(\partial K^r)$ ($q=0, 1, \cdots, r-1$) 表示其平均曲率积分. 当我们把 K^r 看作是 $E_n(n>r)$ 中的平坦凸体(或简称平凸体)时, ∂K^r 的平均曲率积分则以 $M_q^{(n)}(\partial K^r)$ ($q=0, 1, \cdots, r-1$)记之. Santaló 导出这二者的关系如下(见[2]):

1° 当 $q\geqslant n-r$ 时, 有

$$M_q^{(n)}(\partial K^r)=\frac{\begin{pmatrix} r-1\\ q-n+r\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n-1\\ q\end{pmatrix}}\cdot\frac{O_q}{O_{q-n+r}}M_{q-n+r}^{(r)}(\partial K^r). \tag{6.4.34}$$

2° 当 $q=n-r-1$ 时, 有

$$M_{n-r-1}^{(n)}(\partial K^r)=\begin{pmatrix} n-1\\ n-r-1\end{pmatrix}^{-1}O_{n-r-1}V_r(K^r), \tag{6.4.35}$$

其中 $V_r(K^r)$ 表示 K^r 的 r 维体积.

3° 当 $q<n-r-1$ 时, 有

$$M_q^{(n)}(\partial K^r)=0. \tag{6.4.36}$$

§6.5 与一凸集相交的 r 维平面集

6.5.1 与一凸集相交的 r 维平面集的测度

设 K 为 E_n 中凸集. 我们希望求出集 $\{L_r; L_r\cap K\neq\emptyset\}$ 的测度.

设 $L_{n-r[O]}$ 为经过原点 O 的 $(n-r)$ 维平面, L_r 为垂直于 $L_{n-r[O]}$ 的 r 维平面. 点 $L_r\cap L_{n-r[O]}$ 记为 p. $L_{n-r[O]}$ 在 p 点的体积元以 $d\sigma_{n-r}$ 表示. 则有(见(6.2.19)式)

$$dL_r=d\sigma_{n-r}\wedge dL_{n-r[O]}. \tag{6.5.1}$$

在 $\{L_r; L_r\cap K\neq\emptyset\}$ 上考虑上式的积分. 先任意固定 $L_{n-r[O]}$ 求积分得到 K 的投影之体积 $V(K'_{n-r})$, 于是有

$$\begin{aligned}m\{L_r; L_r\cap K\neq\emptyset\}&=\int_{L_r\cap K\neq\emptyset}dL_r\\&=\int_{G_{n-r,r}}V(K'_{n-r})dL_{n-r[O]}=I_r(K)\\&=\frac{nO_{n-2}\cdots O_{n-r-1}}{(n-r)O_{r-1}\cdots O_1O_0}W_r(K),\end{aligned} \tag{6.5.2}$$

其中后二等式来源于 I_r 及 W_r 之定义((6.3.1)、(6.3.11)二式).

利用均质积分与平均曲率积分的关系(6.4.13), 由(6.5.2)式可得

$$\int_{L_r\cap K\neq\emptyset}dL_r=\frac{O_{n-2}\cdots O_{n-r-1}}{(n-r)O_{r-1}\cdots O_1O_0}M_{r-1}(\partial K). \tag{6.5.3}$$

倘若 K 为含于 $L_q(q<n)$ 中的凸体, 则应按平坦凸体考虑. 这时要用到 6.4.4 段中的诸关系.

我们来考察(6.5.2)和(6.5.3)二式的几个特殊情况.

若 K 为 E_n 中凸集, 则一切与 K 相遇的直线之集的测度为

$$\int_{L_1\cap K\neq\emptyset}dL_1=\frac{O_{n-2}}{2(n-1)}F, \tag{6.5.4}$$

其中 F 为 K 的表面积. 特别是 $n=2$、$r=1$ 便是我们熟知的公式

$$\int_{G\cap K\neq\emptyset} dG = L.$$

当 $n=3$、$r=1$ 时，得到

$$\int_{L_1\cap K\neq\emptyset} dL_1 = (\pi/2)F. \tag{6.5.5}$$

又，对 $n=3$ 和 $r=2$，有

$$\int_{L_2\cap K\neq\emptyset} dL_2 = M_1. \tag{6.5.6}$$

6.5.2 $W_{i+1}^{(r)}(L_r\cap K)$ 在集 $\{L_r: L_r\cap K\neq\emptyset\}$ 上的积分

为了导出这一积分公式，要用到(6.2.27)式：

$$dL_{i+1}^{(r)}\vee\wedge dL_r^* = dL_{r[i+1]}\wedge dL_{i+1}.$$

考虑上式双方的积分. 左方的积分可计算如下：先固定 L_r，内层积分域取 $\{L_{i+1}^{(r)}: L_{i+1}^{(r)}\cap K\neq\emptyset\}$，于是有

$$I=\int dL_{i+1}^{(r)}\wedge dL_r^* = \int_{L_r\cap K\neq\emptyset}\left(\int_{L_{i+1}^{(r)}\cap K\neq\emptyset} dL_{i+1}^{(r)}\right)dL_r^*. \tag{6.5.7}$$

利用(6.5.2)式($n\to r$, $r\to i+1$)，内层积分为

$$\int_{L_{i+1}^{(r)}\cap K\neq\emptyset} dL_{i+1}^{(r)} = \frac{rO_{r-2}\cdots O_{r-i-2}}{(r-i-1)O_i\cdots O_1O_0} W_{i+1}^{(r)}(L_r\cap K).$$

将此式代入(6.5.7)式，得到

$$I=\frac{rO_{r-2}\cdots O_{r-i-2}}{(r-i-1)O_i\cdots O_1O_0}\int_{L_r\cap K\neq\emptyset} W_{i+1}^{(r)}(L_r\cap K)dL_r^*. \tag{6.5.8}$$

另一方面，由(6.2.17)和(6.5.2)二式，右方的积分

$$\begin{aligned} I &= \int_{L_{i+1}\cap K\neq\emptyset} dL_{i+1}\int_{\text{Total}} dL_{r[i+1]} \\ &= \frac{2O_{n-i-2}\cdots O_{n-r}}{O_{r-i-2}\cdots O_1O_0}\cdot\frac{nO_{n-2}\cdots O_{n-i-2}}{(n-i-1)O_i\cdots O_1O_0} W_{i+1}(K), \end{aligned} \tag{6.5.9}$$

其中因子“2”的来由在于我们考虑的是定向的 r 维平面. 由(6.5.8)、(6.5.9)二式，得到

$$\int_{L_r \cap K \neq \emptyset} W_{i+1}^{(r)}(L_r \cap K) dL_r$$
$$= \frac{n(r-i-1)O_{n-i-2}O_{n-2}\cdots O_{n-r}}{r(n-i-1)O_{r-i-2}O_{r-2}\cdots O_1 O_0} W_{i+1}(K), \tag{6.5.10}$$

注意在导出此式时我们已回到认为 L_r 是未定向平面的假定上了. 利用恒等式 $2\pi O_{i-2} = (i-1)O_i$, 得到

$$\int_{L_r \cap K \neq \emptyset} W_{i+1}^{(r)}(L_r \cap K) dL_r = \frac{nO_{n-2}\cdots O_{n-r}O_{n-i}}{rO_{r-2}\cdots O_0 O_{r-i}} W_{i+1}(K). \tag{6.5.11}$$

引用(6.4.13)式, 可将上式转化为平均曲率积分的关系:

$$\int_{L_r \cap K \neq \emptyset} M_i^{(r)}(\partial(L_r \cap K)) dL_r$$
$$= \frac{O_{n-2}\cdots O_{n-r}O_{n-i}}{O_{r-2}\cdots O_0 O_{r-i}} M_i(\partial K). \tag{6.5.12}$$

6.5.3 Crofton 公式

我们在第二章中曾经介绍过弦幂积分序列及其不等式. 在 E_2 中, 幂次等于 3 时是等式:

$$\int_{G \cap K \neq \emptyset} \sigma^3 dG = 6F^2.$$

在 E_3 中, 也可以证明幂次等于 4 时是等式:

$$\int_{L_1 \cap K \neq \emptyset} \sigma^4 dL_1 = 6V^2.$$

我们将看到, 对 E_n 而言幂次为 $n+1$ (空间的维数加 1) 时仍是等式. 它是 E_2、E_3 情形的普遍化.

定理(Crofton 公式) 设 K 为 E_n 中凸体, K 被直线 L_1 截出的弦长记为 σ. 则有

$$\int_{L_1 \cap K \neq \emptyset} \sigma^{n+1} dL_1 = \frac{n(n+1)}{2} V^2, \tag{6.5.13}$$

其中 V 是 K 的体积.

证明 设 P_1, P_2 为 E_n 中任二点, L_1 为 P_1 和 P_2 所决定的直线. 在 L_1 上取定坐标系, 并设 P_1, P_2 之坐标分别为 t_1, t_2. 由

(6.2.33)式,

$$dP_1 \wedge dP_2 = |t_2 - t_1|^{n-1} dt_1 \wedge dt_2 \wedge dL_1. \tag{6.5.14}$$

在 $\{(P_1, P_2): P_1, P_2 \in K\}$ 上取上式双方的积分. 左方的积分为

$$I = \int_{P_1, P_2 \in K} dP_1 \wedge dP_2 = V^2. \tag{6.5.15}$$

右方的积分为

$$I = \int_{L_1 \cap K \neq \emptyset} \left[\int_a^b \int_a^b |t_2 - t_1|^{n-1} dt_1 \wedge dt_2 \right] dL_1,$$

其中 a, b 为 L_1 与 ∂K 的交点在 L_1 上的坐标, 不妨设 $a<b$. 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_{L_1 \cap K \neq \emptyset} dL_1 \int_a^b \left[\int_a^{t_1} (t_1 - t_2)^{n-1} dt_2 + \int_{t_1}^b (t_2 - t_1)^{n-1} dt_2 \right] dt_1 \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \int_{L_1 \cap K \neq \emptyset} \sigma^{n+1} dL_1. \end{aligned} \tag{6.5.16}$$

由(6.5.15)、(6.5.16)二式立即得到(6.5.13)式.

利用(6.5.13)和(6.5.4)二式, 得到 σ^{n+1} 的平均值:

$$E(\sigma^{n+1}) = \frac{n(n^2-1)V^2}{O_{n-2}F}. \tag{6.5.17}$$

§6.6 陈省身公式[3]

6.6.1 一个密度关系式

本节主要目的是导出一个很有用的积分公式(即下面的公式(6.6.14)). 作为准备工作, 我们在这一段先介绍一个密度关系式.

设 $L_{q[O]}$ 是过定点 O 的固定的 q 维平面, $L_{r[O]}$ 是过 O 点的活动的 r 维平面. 假定 $r+q>n$. 在此情况下, 交 $L_{r[O]} \cap L_{q[O]}$ 一般是过 O 点的 $(r+q-n)$ 维平面, 记为 $L_{r+q-n[O]}$. 我们的目标是用 $dL_{r[r+q-n]}$ 与 $dL^{(q)}_{r+q-n[O]}$ 来表达 $dL_{r[O]}$, 其中 $dL_{r[r+q-n]}$ 表示含有 $L_{r+q-n[O]}$ 的 L_r 的密度, $dL^{(q)}_{r+q-n[O]}$ 表示 $L_{q[O]}$ 的子空间 $L_{r+q-n[O]}$ 的密度.

以定点 O 作为原点. 设计如下之活动标架.

活动标架 I:

(a) $e_1, \cdots, e_{r+q-n}$ 张成 $L_{q[O]}\cap L_{r[O]}$;

(b) $e_{r+q-n+1}, \cdots, e_r$ 位于 $L_{r[O]}$ 内;

(c) 任意选定 $e_{r+1}, \cdots, e_n$ 致 $e_1, \cdots, e_n$ 组成正交标准化标架.

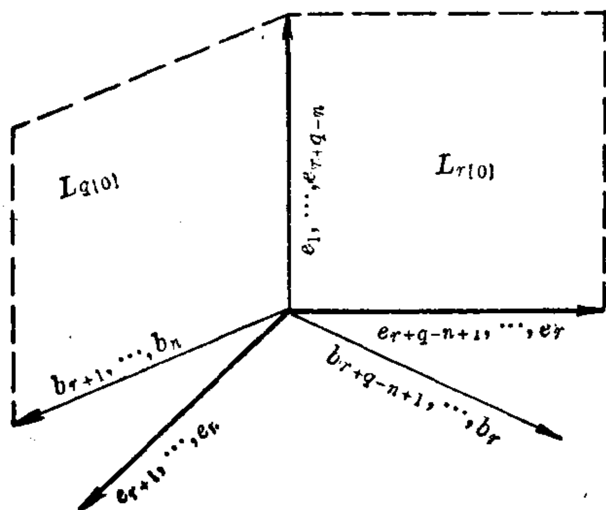


图 6-1

活动标架 II:

(a) $e_1, \cdots, e_{r+q-n}$ 张成 $L_{q[O]}\cap L_{r[O]}$;

(b) $b_{r+q-n+1}, \cdots, b_r$ 是正交于 $L_{q[O]}$ 的 $(n-q)$ 维平面 $L_{n-q[O]}$ 中的单位常向量;

(c) $b_{r+1}, \cdots, b_n$ 位于 $L_{q[O]}$ 之中，并与 $e_1, \cdots, e_{r+q-n}$ 一起构成 $L_{q[O]}$ 的一正交标准化标架.

回顾(6.2.8)、(6.1.13)二式，应有

$$dL_{r[O]}=\bigwedge_{i,h}\omega_{hi}=\bigwedge_{i,h}(e_h\cdot de_i),$$

$$i=1, \cdots, r; h=r+1, \cdots, n.$$

上式可改写为

$$dL_{r[O]}=\bigwedge_{\alpha,i}(e_{r+\alpha}\cdot de_i)\bigwedge_{\alpha,h}(e_{r+\alpha}\cdot de_h), \tag{6.6.1}$$

指标 α, i, h 的变域为

$$\alpha=1, 2, \cdots, n-r; i=1, \cdots, r+q-n;$$

$$h=r+q-n+1, \cdots, r. \tag{6.6.2}$$

由(6.2.7)式，有

$$dL_{r[r+q-n]}=\bigwedge_{\alpha,h}(e_{r+\alpha}\cdot de_h), \tag{6.6.3}$$

$$dL^{(q)}_{r+q-n[O]}=\bigwedge_{\alpha,i}(b_{r+\alpha}\cdot de_i). \tag{6.6.4}$$

对(6.6.3)式用的是标架 I，对(6.6.4)式用了标架 II. 上二式中指标 α, h, i 的变域与(6.6.2)式一样. 以下我们来求 $\bigwedge\limits_{\alpha,i}(b_{r+\alpha}\cdot de_i)$

与 $\bigwedge\limits_{\alpha,i}(e_{r+\alpha}\cdot de_i)$ 之间的关系.

注意，对于 $\alpha=1, \cdots, n-r$, $e_{r+\alpha}$ 总可用 $b_{r+q-n+1}, \cdots, b_n$ 的线性组合表示，故有

$$e_{r+\alpha}=\sum_h u_{r+\alpha,h}b_h+\sum_k u_{r+\alpha,k}b_k, \tag{6.6.5}$$

其中 $k=r+1, \cdots, n$, 而 h 仍由(6.6.2)式给出. 又，由标架 II 构成条件(b)知 $b_h(h=r+q-n+1, \cdots, r)$ 为常向量，故

$$(b_h\cdot de_i)=-(e_i\cdot db_h)=0.$$

于是从(6.6.5)式可得

$$(e_{r+\alpha}\cdot de_i)=\sum_k u_{r+\alpha,k}(b_k\cdot de_i). \tag{6.6.6}$$

将(6.6.6)式代入(6.6.1)式，并利用(6.6.3)、(6.6.4)二式，最后得到

$$dL_{r[O]}=\Delta^{r+q-n}dL_{r[r+q-n]}\wedge dL^{(q)}_{r+q-n[O]}, \tag{6.6.7}$$

其中

$$\Delta=\det(e_{r+\alpha}\cdot b_k). \tag{6.6.8}$$

6.6.2 Δ^{r+q-n} 的积分

虽然 Δ 本身无法确定，但 Δ^{r+q-n} 的积分值是可以求出的；而这一点正是我们从 (6.6.7) 式出发推导积分公式时所必需的. 考虑 (6.6.7)式在 $G_{r,n-r}$(即一切 $L_{r[O]}$ 之集)上的积分. 由(6.2.10)式，左方的积分为

$$\int_{G_{r,n-r}} dL_{r[O]}=\frac{O_{n-1}\cdots O_{n-r}}{O_{r-1}\cdots O_1O_0}.$$

右方 $dL^{(q)}_{r+q-n[O]}$ 的积分亦可按(6.2.10)式算出(q 相当于 n, $r+q-n$ 相当于 r):

$$\int dL^{(q)}_{r+q-n[O]}=\frac{O_{q-1}\cdots O_{n-r}}{O_{r+q-n-1}\cdots O_1O_0},$$

积分域为一切 $L^{(q)}_{r+q-n[O]}$. 从而有

$$\int\Delta^{r+q-n}dL_{r[r+q-n]}=\frac{O_{n-1}\cdots O_q}{O_{r-1}\cdots O_{r+q-n}}, \tag{6.6.9}$$

积分域为一切 $L_{r[r+q-n]}$.

现在让我们来推导 (6.6.9) 式的另一形式. 根据 6.2.3 段定理 2 的证明中所讲的道理, 有

$$dL_{r[q]} = dL_{r-q[O]}^{(n-q)}. \tag{6.6.10}$$

用于现在的情况, 则有

$$dL_{r[r+q-n]} = dL_{n-q[O]}^{(2n-r-q)}. \tag{6.6.11}$$

于是(6.6.9)式变成

$$\int_{G_{n-q,n-r}} \Delta^{r+q-n} dL_{n-q[O]}^{(2n-r-q)} = \frac{O_{n-1}\cdots O_q}{O_{r-1}\cdots O_{r+q-n}}. \tag{6.6.12}$$

引入记号: $r+q-n=N$, $2n-r-q=\nu$, $n-q=\rho$, 则有

$$\int_{G_{\rho,\nu-\rho}} \Delta^N dL_{\rho[O]}^{(\nu)} = \frac{O_{N-\nu-1}\cdots O_{N+\nu-\rho}}{O_{N+\rho-1}\cdots O_N}. \tag{6.6.13}$$

6.6.3 陈省身公式

定理(陈省身) 设 $F(L_r)$ 为可积函数, 且仅依赖于 $L_{r+q-n}^{(q)} = L_r \cap L_{q[O]}$. 则有

$$\int F(L_r) dL_r = \frac{O_n\cdots O_{q+1}}{O_r\cdots O_{r+q-n+1}} \int F(L_{r+q-n}^{(q)}) dL_{r+q-n}^{(q)}. \tag{6.6.14}$$

证明 证明的关键在于对 dL_r 导出类似于 (6.6.7) 的密度表示式. 以 L_r 作为活动标架, $L_{q[O]}$ 仍作为固定标架. 设 $r+q>n$. 令 $x \in L_r \cap L_{q[O]}$. 以 x 作为上一段标架 I 和标架 II 的原点. 注意到

$$dL_{n-r[O]} = dL_{r[O]} = dL_{r[x]}$$

及

$$d\sigma_{n-r} = (dx \cdot e_{r+1}) \wedge \cdots \wedge (dx \cdot e_n),$$

便有

$$dL_r = dL_{r[x]} \bigwedge_{\alpha} (dx \cdot e_{r+\alpha}), \quad \alpha = 1, \cdots, n-r. \tag{6.6.15}$$

据标架 II 构成条件, 诸向量 $b_h (h = r+q-n+1, \cdots, r)$ 正交于交集 $L_r \cap L_{q[O]}$, 故有 $dx \cdot b_h = 0$. 用 dx 与(6.6.5)式两边作内积, 则有

$$dx \cdot e_{r+\alpha} = \sum_{k=r}^{n} u_{r+\alpha,k} (dx \cdot b_k). \tag{6.6.16}$$

从而有

$$\bigwedge_{\alpha}(dx\cdot e_{r+\alpha})=\Delta\bigwedge_{k}(dx\cdot b_k),$$
$$\alpha=1,\ \cdots,\ n-r;\ k=r+1,\ \cdots,\ n. \tag{6.6.17}$$

另一方面，将(6.6.15)式用于 $L^{(q)}_{r+q-n}$，有

$$dL^{(q)}_{r+q-n}=dL^{(q)}_{r+q-n[x]}\bigwedge_{k}(dx\cdot b_k). \tag{6.6.18}$$

由(6.6.15)和(6.6.6)二式，有

$$dL_r=\Delta^{r+q-n}dL_{r[r+q-n]}\wedge dL^{(q)}_{r+q-n[x]}\bigwedge_{\alpha}(dx\cdot e_{r+\alpha}).$$

代入(6.6.17)式并计及(6.6.18)式，则有

$$dL_r=\Delta^{r+q-n+1}dL_{r[r+q-n]}\wedge dL^{(q)}_{r+q-n[x]}\bigwedge_{k}(dx\cdot b_k)$$
$$=\Delta^{r+q-n+1}dL_{r[r+q-n]}\wedge dL^{(q)}_{r+q-n}. \tag{6.6.19}$$

由定理中关于 F 的假定，利用上式，便得到

$$\int F(L_r)dL_r=\int\Delta^{r+q-n+1}\,dL_{r[r+q-n]}\int F(L^{(q)}_{r+q-n})dL^{(q)}_{r+q-n}. \tag{6.6.20}$$

余下的问题是求出积分

$$I=\int\Delta^{r+q-n+1}\,dL_{r[r+q-n]}.$$

由(6.6.11)式，此积分可转化为下述形式：

$$I=\int\Delta^{r+q-n+1}\,dL^{(2n-r-q)}_{n-q[O]}. \tag{6.6.21}$$

运用(6.6.13)式立即可算出：

$$I=\frac{O_n\cdots O_{q+1}}{O_r\cdots O_{r+q-n+1}}. \tag{6.6.22}$$

代入(6.6.20)式便完成了证明.

值得提醒一下，由于函数 $F(\cdot)$ 的任意性，公式(6.6.14)包含了很丰富的内容．在下一节的一个重要的积分公式证明中要用到它．这里我们先讲它的一个简单的应用.

设 K_q 是含于 $L_{q[O]}$ 之中的凸集．规定

$$F=\begin{cases}1, & \text{当 } L_r\cap K_q\neq\emptyset \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } L_r\cap K_q=\emptyset \text{ 时}.\end{cases}$$

这时(6.6.14)式成为

$$\int_{L_r \cap K_q \neq \emptyset} dL_r = \frac{O_n \cdots O_{q+1}}{O_r \cdots O_{r+q-n+1}} \int_{L^{(q)}_{r+q-n} \cap K_q \neq \emptyset} dL^{(q)}_{r+q-n}. \tag{6.6.23}$$

由(6.5.3)式，有

$$\int_{L_r \cap K_q \neq \emptyset} dL_r = \frac{O_{n-2} \cdots O_{n-r-1}}{(n-r) O_{r-1} \cdots O_0} M^{(n)}_{r-1}, \tag{6.6.24}$$

$$\int_{L^{(q)}_{r+q-n} \cap K_q \neq \emptyset} dL^{(q)}_{r+q-n} = \frac{O_{q-2} \cdots O_{n-r-1}}{(n-r) O_{r+q-n-1} \cdots O_0} M^{(q)}_{r+q-n-1}. \tag{6.6.25}$$

其中 $M^{(n)}_{r-1}$ 表示 E_n 中凸集 K_q 的平均曲率积分，而 $M^{(q)}_{r+q-n-1}$ 则表示作为 $L_{q[O]}$ 中之凸集 K_q 的平均曲率积分. 由以上三式得到

$$M^{(n)}_{r-1} = \frac{O_{r+q-n} O_n O_{n-1}}{O_r O_q O_{q-1}} M^{(q)}_{r+q-n-1}, \tag{6.6.26}$$

此式吻合于(6.4.34)式.

§6.7 Santaló 公 式

6.7.1 一个密度关系式

这一节的讨论，围绕着与一紧致流形相交的线性空间而展开，将导出一个重要的积分公式——Santaló 公式. 为此，先寻求一种新的密度表示式.

设 $(x;\ e_i)$ 是正交标准化活动标架，并设 r 维平面 L_r 由 x 及 $e_1, \cdots, e_r$ 张成. 由(6.2.5)和(6.2.4)二式，有

$$dL_r = \bigwedge_i \omega_i \bigwedge_{h,j} \omega_{hj}, \qquad j=1, \cdots, r;\ i, h=r+1, \cdots, n. \tag{6.7.1}$$

以 $L_{n-r[x]}$ 表示在 x 处正交于 L_r 的 $(n-r)$ 维平面. 显然

$$\wedge \omega_i = \wedge (dx \cdot e_i) (i=r+1, \cdots, n)$$

等于 $L_{n-r[x]}$ 在 x 处的体积元 $d\sigma_{n-r}(x)$. 又

$$\wedge \omega_{hj} = \wedge (e_j \cdot de_h) (h=r+1, \cdots, n;\ j=1, \cdots, r)$$

等于过 x 的 r 维平面 $L_{r[x]}$ 的密度. 因此有

$$dL_r = d\sigma_{n-r}(x) \wedge dL_{r[x]}. \tag{6.7.2}$$

设 M^q 是 E_n 中紧致流形，$r+q>n$. 交集 $L_r \cap M^q$ 一般是 $r+q-n$ 维流形. 假定活动标架$(x; e_i)$满足下述要求：$x \in L_r \cap M^q$ 且 $e_1, \cdots, e_{r+q-n}$ 构成 $L_r \cap M^q$ 的切空间的一组正交标准化基，而 $e_1, \cdots, e_{r+q-n}, b_{r+1}, \cdots, b_n$ 是 M^q 的切空间的一组基. 由于我们仅仅考虑那些与 M^q 相交的 r 维平面，因此，我们总可以认为(6.7.2)式中的 x 适合这样的要求：dx 是 M^q 的切向量，即

$$dx = \sum_{i=1}^{r+q-n} \lambda_i e_i + \sum_{k=r+1}^{n} \beta_k b_k, \tag{6.7.3}$$

其中 λ_i, β_k 为 1 形式，从而有

$$\omega_{r+\alpha} = dx \cdot e_{r+\alpha} = \sum_{k=r+1}^{n} \beta_k (b_k \cdot e_{r+\alpha}), \ \alpha = 1, \cdots, n-r. \tag{6.7.4}$$

于是

$$d\sigma_{n-r}(x) = \bigwedge_{\alpha=1}^{n-r} \omega_{r+\alpha} = \Delta \bigwedge_{k=r+1}^{n} \beta_k, \tag{6.7.5}$$

其中 $\Delta = \det(b_k \cdot e_{r+\alpha})$. 以 $\phi_{k,r+\alpha}$ 表示 b_k 与 $e_{r+\alpha}$ 间的夹角，则行列式 Δ 可写作

$$\Delta = \det(\cos\phi_{k,r+\alpha}), \ k = r+1, \cdots, n; \ \alpha = 1, \cdots, n-r. \tag{6.7.6}$$

(6.7.5)式表达出在 x 处正交于 L_r 的$(n-r)$维体积元. 作为此公式的特款，不难推知：M^q 在 x 处正交于 $L_r \cap M^q$ 的$(n-r)$维体积元正好等于 $\bigwedge_{k=r+1}^{n} \beta_k$. 事实上，据假设，$e_1, \cdots, e_{r+q-n}$ 张成 $L_r \cap M^q$ 之切空间，$e_1, \cdots, e_{r+q-n}, b_{r+1}, \cdots, b_n$ 张成 M^q 之切空间. 因此，在考虑 M^q 在 x 处正交于 $L_r \cap M^q$ 的$(n-r)$维体积元时，$e_{r+1}, \cdots, e_n$ 与 $b_{r+1}, \cdots, b_n$ 一致，从而 $\Delta = 1$. 今以 $d\sigma_q(x)$ 表示 M^q 在 x 处的体积元，以 $d\sigma_{r+q-n}(x)$ 表示 $L_r \cap M^q$ 在 x 处的体积元. 则应有

$$\bigwedge_{k=r+1}^{n} \beta_k \wedge d\sigma_{r+q-n}(x) = d\sigma_q(x). \tag{6.7.7}$$

将(6.7.5)式代入(6.7.2)式，得到

$$dL_r = \Delta \bigwedge_{k=r+1}^{n} \beta_k \wedge dL_{r[x]}. \tag{6.7.8}$$

上式两边外乘 $d\sigma_{r+q-n}$ 并利用(6.7.7)式，最后得到

$$d\sigma_{r+q-n}(x)\wedge dL_r=\Delta d\sigma_q(x)\wedge dL_{r[x]}. \qquad (6.7.9)$$

在 $r+q-n=0$ 的情形，与公式(6.7.9)相应的结论为

$$dL_r=\Delta d\sigma_q(x)\wedge dL_{r[x]}. \qquad (6.7.10)$$

6.7.2 Santaló 公式[4]

本段的目标是证明下述重要结论：

定理(Santaló) 设 M^q 是嵌入于 E_n 的 q 维逐块光滑的紧致微分流形. L_r 表示 E_n 中 r 维平面，$r+q\geqslant n$. 以 $\sigma_k(\cdot)$表示 k 维流形的 k 维体积. 则有

$$\int_{L_r\cap M^q\neq\emptyset}\sigma_{r+q-n}(L_r\cap M^q)dL_r=\frac{O_n\cdots O_{n-r}O_{r+q-n}}{O_r\cdots O_0 O_q}\sigma_q(M^q). \qquad (6.7.11)$$

证明 考虑(6.7.9)式双方的积分，积分域为 $L_r\cap M^q\neq\emptyset$. 左方：先任意固定一 L_r，对 x 积分($x\in L_r\cap M^q$)，得到 $\sigma_{r+q-n}(L_r\cap M^q)$；然后再对 L_r 积分，得到

$$\int_{L_r\cap M^q\neq\emptyset}\sigma_{r+q-n}(L_r\cap M^q)dL_r.$$

在考虑右方的积分时，我们注意(6.7.9)式中的 $\Delta=\det(b_k\cdot e_{r+\alpha})$ ($k=r+1,\cdots,n$; $\alpha=1,\cdots,n-r$) 只与 L_r 的相对方位(L_r 相对于 M^q 之切空间的方位)有关，而与 x 的位置无关. 又，$dL_{r[x]}=dL_{r[O]}$，与 x 的位置亦无关. 因此右方的积分为

$$\sigma_q(M^q)\int\Delta\, dL_{r[x]}.$$

记

$$c=\int\Delta\, dL_{r[x]},$$

我们有

$$\int_{L_r\cap M^q\neq\emptyset}\sigma_{r+q-n}(L_r\cap M^q)dL_r=c\sigma_q(M^q). \qquad (6.7.12)$$

以下我们来确定常数 c(见[5]). 在陈省身公式(6.6.14)中，取 q 维凸体 K^q 作为 M^q，并设

$$F(L_r)=\begin{cases}\sigma_{r+q-n}(L_r\cap K^q), & 当\ L_r\cap K^q\neq\emptyset.\\ 0, & 当\ L_r\cap K^q=\emptyset.\end{cases}$$

则(6.6.14)式给出

$$\int_{L_r\cap K^q\neq\emptyset}\sigma_{r+q-n}(L_r\cap K^q)dL_r$$
$$=\frac{O_n\cdots O_{q+1}}{O_r\cdots O_{r+q-n+1}}\int_{L^{(q)}_{r+q-n}\cap K^q\neq\emptyset}\sigma_{r+q-n}(L^{(q)}_{r+q-n}\cap K^q)\,dL^{(q)}_{r+q-n}.$$

(6.7.13)

为了算出(6.7.13)式右方的积分，要用到下面的积分公式：

$$\int_{L_s\cap K\neq\emptyset}\sigma_s(L_s\cap K)\,dL_s=\frac{O_{n-1}\cdots O_{n-s}}{O_{s-1}\cdots O_0}V. \qquad (6.7.14)$$

(6.7.14)式可由 $dL_s=d\sigma_{n-s}\wedge dL_{n-s[O]}$(见(6.2.19)式) 乘以 $\sigma_s(L_s\cap K)$取积分得到．在(6.7.14)式中，以 q 作为 n、以 $r+q-n$ 作为 s 并以 K^q 作为 K，则有

$$\int_{L^{(q)}_{r+q-n}\cap K^q\neq\emptyset}\sigma_{r+q-n}(L^{(q)}_{r+q-n}\cap K^q)dL^{(q)}_{r+q-n}$$
$$=\frac{O_{q-1}\cdots O_{n-r}}{O_{r+q-n-1}\cdots O_0}\sigma_q(K^q).$$

代入(6.7.13)式，得到

$$\int_{L_r\cap K^q\neq\emptyset}\sigma_{r+q-n}(L_r\cap K^q)dL_r=\frac{O_n\cdots O_{n-r}O_{r+q-n}}{O_r\cdots O_0O_q}\sigma_q(K^q).$$

(6.7.15)

另一方面，若由(6.7.12)式则应为

$$\int_{L_r\cap K^q\neq\emptyset}\sigma_{r+q-n}(L_r\cap K^q)dL_r=c\sigma_q(K^q). \qquad (6.7.16)$$

比较(6.7.15)、(6.7.16)二式，得到常数 c，再将求出的 c 代回(6.7.12)式便得到 Santaló 公式(6.7.11)．

当 $r+q=n$ 时，公式(6.7.11)取下述形状：

$$\int_{M^{n-r}\cap L_r\neq\emptyset}N(M^{n-r}\cap L_r)dL_r=\frac{O_n\cdots O_{n-r+1}}{O_r\cdots O_1}\sigma_{n-r}(M^{n-r}).$$

(6.7.17)

公式(6.7.11)是一个相当普遍的公式．作为练习，取 M^q 为凸体(域)或凸曲面(线)，建议读者写出以下各款的具体结果：① n

$=2$, $r=1$, $q=1$; ② $n=2$, $r=1$, $q=2$; ③ $n=3$, $r=1$, $q=2$; ④ $n=3$, $r=1$, $q=3$; ⑤ $n=3$, $r=2$, $q=1$; ⑥ $n=3$, $r=2$, $q=2$.

§6.8 二流形交集的体积的积分

6.8.1 一个密度公式

在§6.7中我们讨论过 r 维平面与 q 维流形相交的有关问题，主要结果是算出 $\sigma_{r+q-n}(L_r \cap M^q)$ 的积分．现在我们要讨论涉及两个流形的类似的问题．讨论的方法仍然是活动标架法．通过标架的特定的选取，找出合适的运动密度的表达形式，是解决问题的关键．

设 M^q 是固定的 q 维流形，M^r 是运动的 r 维流形．假定二者皆是逐块 C^1 类光滑流形．还假定 M^q, M^r 具有有限体积(指相应维数的体积)，分别记为 $\sigma_q(M^q)$ 和 $\sigma_r(M^r)$．另外，设 $r+q\geqslant n$，此时 $M^q \cap M^r$ 一般为 $r+q-n$ 维流形．

设 $x\in M^r\cap M^q$．取 $(x; e_i)$ $(i=1, \cdots, n)$ 为一活动标架，满足下述条件：

1° $e_1, \cdots, e_{r+q-n}$ 张成 $M^r\cap M^q$ 在 x 处的切空间；

2° $e_{r+q-n+1}, \cdots, e_r$ 在 x 处切于 M^r (结合条件1°，可见 $e_1, \cdots, e_r$ 张成 M^r 在 x 处的切空间)；

3° $e_1, \cdots, e_{r+q-n}, b_1, \cdots, b_{n-r}$ 张成 M^q 在 x 处之切空间(其中 $b_1, \cdots, b_{n-r}$ 为 $(n-r)$ 个正交标准化向量)．

由于 $x\in M^q$，故 $dx\in T_x(M^q)$．从而

$$dx=\sum_{h=1}^{r+q-n}\alpha_h e_h+\sum_{j=1}^{n-r}\beta_j b_j, \tag{6.8.1}$$

其中 α_h, β_j 为1形式．于是有

$$\omega_{r+h}=dx\cdot e_{r+h}=\sum_{j=1}^{n-r}\beta_j(b_j\cdot e_{r+h}), \tag{6.8.2}$$

$$h=1, \cdots, n-r,$$

作外积，得到

$$\bigwedge_{h=1}^{n-r}\omega_{r+h}=\Delta\bigwedge_{j=1}^{n-r}\beta_j, \tag{6.8.3}$$

其中

$$\Delta=\det(b_j\cdot e_{r+h})\,(j,\ h=1,\ \cdots,\ n-r). \tag{6.8.4}$$

运用与导出(6.7.7)式时类似的推理，可知 $\wedge\beta_j(j=1,\ \cdots,\ n-r)$ 是 M^q 沿正交于 $M^r\cap M^q$ 之$(n-r)$维平面方向的体积元. 以 $d\sigma_q(x)$表示M^q在 x 处的体积元, 以 $d\sigma_{r+q-n}(x)$表示$M^r\cap M^q$在 x 处的体积元, 则有

$$d\sigma_{r+q-n}(x)\bigwedge_{j=1}^{n-r}\beta_j=d\sigma_q(x). \tag{6.8.5}$$

于(6.8.3)式双方同乘 $d\sigma_{r+q-n}(x)\bigwedge\limits_{i=1}^{r}\omega_i\left(\bigwedge\limits_{i=1}^{r}\omega_i\text{ 是 }M^r\text{ 在 }x\text{ 处的体积元 }d\sigma_r(x)\right)$, 得到

$$d\sigma_{r+q-n}(x)\bigwedge_{i=1}^{n}\omega_i=\Delta d\sigma_{r+q-n}(x)\bigwedge_{j=1}^{n-r}\beta_j\bigwedge_{i=1}^{r}\omega_i.$$

将 $\bigwedge\limits_{i=1}^{r}\omega_i=d\sigma_r(x)$代入上式并计及(6.8.5)式, 有

$$d\sigma_{r+q-n}(x)\bigwedge_{i=1}^{n}\omega_i=\Delta d\sigma_q(x)\wedge d\sigma_r(x). \tag{6.8.6}$$

上式两边乘以

$$dK_{[x]}=\bigwedge_{j<h}\omega_{jh}\quad(j,\ h=1,\ \cdots,\ n), \tag{6.8.7}$$

得到

$$d\sigma_{r+q-n}(x)\bigwedge_{i=1}^{n}\omega_i\bigwedge_{j<h}\omega_{jh}=\Delta\, d\sigma_q(x)\wedge d\sigma_r(x)\wedge dK_{[x]}. \tag{6.8.8}$$

注意, 此处 $dK_{[x]}$ 表示绕定点旋转的特殊旋转群的运动密度, 它与 $d\mathfrak{M}_{[x]}$ 是相同的微分形式, 其区别仅在于: $\mathfrak{M}_{[x]}$ 的总测度是特殊旋转群总测度的 2 倍. 同样, 特殊运动群的运动密度 dK 的表达式亦与 $d\mathfrak{M}$ 相同, 即

$$dK=\bigwedge_{i=1}^{n}\omega_i\bigwedge_{j<h}\omega_{jh},\ (j,\ h=1,\ \cdots,\ n). \tag{6.8.9}$$

计及(6.8.9)式, 则(6.8.8)式成为

$$d\sigma_{r+q-n}(x)\wedge dK=\Delta d\sigma_q(x)\wedge d\sigma_r(x)\wedge dK_{[x]}. \quad (6.8.10)$$

这个密度公式建立了流形 M^r 和 M^q 各自的不变体积元与交集 $M^r\cap M^q$ 的不变体积元之间的关系. 与前面一样, 行列式 Δ 仅依赖于 $e_{r+h}(h=1, \cdots, n-r)$ 与 $b_j(j=1, \cdots, n-r)$ 之间的相对方位, 而与 x 无关.

另外, 当 $r+q-n=0$ 时, 公式(6.8.10)取下述形式:

$$dK=\Delta d\sigma_q(x)\wedge d\sigma_r(x)\wedge dK_{[x]}. \quad (6.8.11)$$

6.8.2 又一个密度公式

设 L_h 是过点 x 而由 $e_1, \cdots, e_h$ 张成的 h 维平面, dK^h 表示 L_h 中的运动群的运动密度, $dK_{[x]}^{n-h}$ 表示正交于 L_h 的 $(n-h)$ 维平面中绕 x 旋转的特殊旋转群的运动密度. 则有

$$dK=dL_h^*\wedge dK^h\wedge dK_{[x]}^{n-h}, \quad (6.8.12)$$

式中 L_h^* 表明我们考虑的是定向的 h 维平面.

证明 L_h 作为 E_n 中的 h 维平面, 由(6.2.5)、(6.2.4)二式, 有

$$dL_h=\bigwedge_i\omega_i\bigwedge_{j,k}\omega_{jk}, \ (j=1, \cdots, h; i, k=h+1, \cdots, n). \quad (6.8.13)$$

L_h 中的特殊运动群的运动密度应为(在(6.8.9)式中以 h 作为 n)

$$dK^h=\bigwedge_j\omega_j\bigwedge_{s<m}\omega_{sm}, \ (j, s, m=1, \cdots, h). \quad (6.8.14)$$

$dK_{[x]}^{n-h}$ 作为 $(n-h)$ 维平面中绕 x 的特殊旋转群的运动密度, 由(6.8.7)式推知

$$dK_{[x]}^{n-h}=\bigwedge_{i<k}\omega_{ik}, \ i, k=h+1, \cdots, n. \quad (6.8.15)$$

又, dK 的表达式由(6.8.9)式给出. 由此立即可得(6.8.12)式. 显然, 对 $h=1, \cdots, n-1$ 公式(6.8.12)均成立.

6.8.3 体积 $\sigma_{r+q-n}(M^r\cap M^q)$ 的积分

定理 关于 M^r, M^q 的假设同前. 则有

$$\int_{M^r\cap M^q\neq\emptyset}\sigma_{r+q-n}(M^r\cap M^q)dK=\frac{O_n\cdots O_1O_{r+q-n}}{O_qO_r}\sigma_r(M^r)\sigma_q(M^q).\tag{6.8.16}$$

证明 取(6.8.10)式两边的积分，积分域为 $\{M^r: M^r\cap M^q\neq\emptyset\}$，有

$$\int_{M^r\cap M^q\neq\emptyset}\sigma_{r+q-n}(M^r\cap M^q)dK=c\sigma_r(M^r)\sigma_q(M^q),\tag{6.8.17}$$

其中 c 为常数，

$$c=\int\Delta dK_{[x]},$$

积分域为过 x 的一切 M^r. 为了确定常数 c，考察一特殊情况：取 M^r 为 r 维平面 L_r 中一有限区域. 利用密度关系(6.8.12)式，则(6.8.17)式变成

$$\int_{M^r\cap M^q\neq\emptyset}\sigma_{r+q-n}(M^r\cap M^q)dL_r^*\wedge dK^r\wedge dK_{[x]}^{n-r}$$
$$=c\sigma_r(M^r)\sigma_q(M^q).\tag{6.8.18}$$

以 dP^r 表示 L_r 中点 x 处的体积元，$dK_{[x]}^r$ 表示 L_r 中绕 x 的特殊旋转群的运动密度，则有(参看(6.1.27)式)

$$dK^r=dP^r\wedge dK_{[x]}^r.$$

将此式代入(6.8.18)式，得到

$$\int_{M^r\cap M^q\neq\emptyset}\sigma_{r+q-n}(M^r\cap M^q)dL_r^*\wedge dP^r\wedge dK_{[x]}^r\wedge dK_{[x]}^{n-r}$$
$$=c\sigma_r(M^r)\sigma_q(M^q).\tag{6.8.19}$$

暂时固定 L_r 和 x，对于含 x 的一切 M^r 考虑 dP^r 的积分，得到 $\sigma_r(M^r)$. 又，据(6.1.22)式，有

$$\int dK_{[x]}^r=O_{r-1}\cdots O_1,\quad\int dK_{[x]}^{n-r}=O_{n-r-1}\cdots O_1.$$

注意，右方已经除去因子“2”，由于现在考虑的是特殊旋转群. 于是(6.8.19)式(亦即(6.8.17)式)就变成

$$O_{r-1}\cdots O_1O_{n-r-1}\cdots O_1\int_{M^r\cap M^q\neq\emptyset}\sigma_{r+q-n}(M^r\cap M^q)dL_r^*$$
$$=c\sigma_q(M^q).\tag{6.8.20}$$

另一方面，由(6.7.11)式(并注意现在考虑的是定向 r 维平面)，有

$$\int_{M^r\cap M^q\neq\emptyset}\sigma_{r+q-n}(M^r\cap M^q)dL_r^*=2\cdot\frac{O_n\cdots O_{n-r}O_{r+q-n}}{O_r\cdots O_0O_q}\sigma_q(M^q). \tag{6.8.21}$$

比较(6.8.20)和(6.8.21)二式可求出常数 c，再代回(6.8.17)式便得到所要证明的(6.8.16)式.

当 $r+q-n=0$ 时，(6.8.16)式取下述形式：

$$\int_{M^r\cap M^q\neq\emptyset}N(M^r\cap M^q)dK=\frac{O_n\cdots O_1O_0}{O_rO_{n-r}}\sigma_r(M^r)\sigma_{n-r}(M^{n-r}), \tag{6.8.22}$$

其中 $N(M^r\cap M^q)$ 表示 M^r 与 M^q 交点数目.

§6.9 陈省身-严志达公式[6]、[7]

6.9.1 一个重要的密度关系式

本节的主旨在于导出 n 维欧氏空间中的运动基本公式，即陈省身-严志达公式. 为此，我们在这一段里先建立一个与二相交超曲面相关联的密度关系式，它可视为第三章中为推导 Poincaré 公式作预备的公式(3.3.4)的一种推广.

设 S_0 和 S_1 是 E_n 中二逐块 C^2 类光滑超曲面. S_0 是固定曲面，S_1 是位置可变动的曲面. E_n 中特殊运动群的运动密度记为 dK_1. $S_0\cap S_1$ 一般为 $(n-2)$ 维流形.

设 $x\in S_0\cap S_1$. 今设计两套正交标准化标架.

标架 I$(x;e_1,\cdots,e_n)$

(a) $e_1,\cdots,e_{n-2}$ 张成 $S_0\cap S_1$ 在 x 处的切空间；

(b) e_{n-1} 是 S_1 在 x 处的切向量，e_n 是 S_1 在 x 处的法向量.

标架 II$(x;e_1,\cdots,e'_{n-1},e'_n)$

(a) $e_1,\cdots,e_{n-2}$ 与标架 I 相同，即它们张成 $S_0\cap S_1$ 在 x 处的切空间；

(b) e'_{n-1} 是 S_0 在 x 处的切向量，e'_n 是 S_0 在 x 处的法向量.

由以上规定可见：$e_1, \cdots, e_{n-1}$ 恰好张成 S_1 在 x 处的切空间，而 $e_1, \cdots, e_{n-2}, e'_{n-1}$ 则张成 S_0 在 x 处的切空间.

我们用下式来定义超曲面 S_1 上的运动密度 dT_1:

$$dT_1 = \bigwedge_i (dx \cdot e_i) \bigwedge_{h<j} (e_h \cdot de_j), \quad i, h, j = 1, \cdots, n-1. \tag{6.9.1}$$

它实际上是：在保持 e_n 与 S_1 垂直的条件下，活动标架$(x; e_1, \cdots, e_n)$的运动密度. 与此类似，我们用下式定义超曲面 S_0 上的运动密度(亦即在保持 e'_n 垂直 S_0 的条件下活动标架$(x; e_1, \cdots, e_{n-2}, e'_{n-1}, e'_n)$的运动密度)：

$$dT_0 = \bigwedge_i (dx \cdot e_i) \bigwedge_{h<j} (e_h \cdot de_j) \wedge (dx \cdot e'_{n-1}) \wedge (e_1 \cdot de'_{n-1}) \wedge \cdots \wedge (e_{n-2} \cdot de'_{n-1}), \quad i, h, j = 1, \cdots, n-2. \tag{6.9.2}$$

又，流形 $S_0 \cap S_1$ 上的运动密度——即随着于 $S_0 \cap S_1$ 上的标架$(x; e_1, \cdots, e_{n-2})$的密度由下式给出：

$$dT_{01} = \bigwedge_i (dx \cdot e_i) \bigwedge_{h<j} (e_h \cdot de_j), \quad i, h, j = 1, \cdots, n-2. \tag{6.9.3}$$

现在我们来寻求 E_n 中特殊运动群的运动密度

$$dK_1 = \bigwedge_i (dx \cdot e_i) \bigwedge_{h<j} (e_h \cdot de_j), \quad (i, h, j = 1, \cdots, n), \tag{6.9.4}$$

与 dT_1, dT_0 及 dT_{01} 之间的关系. 由(6.9.4)和(6.9.1)二式，有

$$dK_1 = dT_1 \wedge (dx \cdot e_n) \wedge (e_1 \cdot de_n) \wedge \cdots \wedge (e_{n-1} \cdot de_n). \tag{6.9.5}$$

由于我们仅考虑非负密度，而$(e_k \cdot de_n) = -(de_k \cdot e_n)$，故(6.9.5)式可改写为

$$dK_1 = dT_1 \wedge (dx \cdot e_n) \wedge (de_1 \cdot e_n) \wedge \cdots \wedge (de_{n-1} \cdot e_n). \tag{6.9.6}$$

由(6.9.2)和(6.9.3)二式，有

$$dT_0 = dT_{01} \wedge (dx \cdot e'_{n-1}) \wedge (e_1 \cdot de'_{n-1}) \wedge \cdots \wedge (e_{n-2} \cdot de'_{n-1}). \tag{6.9.7}$$

与刚才一样，此式可改写为

$$dT_0 = dT_{01} \wedge (dx \cdot e'_{n-1}) \wedge (de_1 \cdot e'_{n-1}) \wedge \cdots \wedge (de_{n-2} \cdot e'_{n-1}). \tag{6.9.8}$$

根据标架I和标架II的构成条件，由 e_n，e'_n 所决定的平面正交于 $S_0\cap S_1$，且 e_{n-1}，e'_{n-1} 均在此平面上。以 φ 表示 e'_n 与 e_n 间的夹角，则有

$$e_n=\sin\varphi e'_{n-1}+\cos\varphi e'_n,\ e_{n-1}=\cos\varphi e'_{n-1}-\sin\varphi e'_n. \tag{6.9.9}$$

现在我们希望利用这些关系重新表达(6.9.6)式，以期沟通(6.9.6)式与(6.9.8)式。为此，我们来计算 $dx\cdot e_n$，$de_1\cdot e_n$，…，$de_{n-1}\cdot e_n$。由(6.9.9)式，有

$$\begin{aligned}
dx\cdot e_n&=\sin\varphi(dx\cdot e'_{n-1})+\cos\varphi(dx\cdot e'_n),\\
de_i\cdot e_n&=\sin\varphi(de_i\cdot e'_{n-1})+\cos\varphi(de_i\cdot e'_n),\ i=1,\ \cdots,\ n-2,\\
de_{n-1}\cdot e_n&=-d\varphi+\cos^2\varphi(de'_{n-1}\cdot e'_n)-\sin^2\varphi(de'_n\cdot e'_{n-1})\\
&=-d\varphi-e'_{n-1}\,de'_n.
\end{aligned}\tag{6.9.10}$$

由于 e'_n 正交于 S_0，从而亦正交于 $S_0\cap S_1$，故

$$dx\cdot e'_n=0.$$

又，由于 e'_n 是固定的超曲面 S_0 的单位法向量，它与 S_1 处于什么位置无关，从而

$$de_i\cdot e'_n=-e_i\cdot de'_n=0,\ i=1,\ \cdots,\ n-2,$$

$$e'_{n-1}\cdot de'_n=0.$$

将这些结果代入(6.9.10)式，有

$$\begin{aligned}
dx\cdot e_n&=\sin\varphi(dx\cdot e'_{n-1}),\\
de_i\cdot e_n&=\sin\varphi(de_i\cdot e'_{n-1}),\ (i=1,\ \cdots,\ n-2),\\
de_{n-1}\cdot e_n&=-d\varphi.
\end{aligned}\tag{6.9.11}$$

将(6.9.11)式代入(6.9.6)式(不计符号)，则有

$$\begin{aligned}
dK_1=\sin^{n-1}\varphi\,d\varphi\wedge dT_1\wedge(dx\cdot e'_{n-1})\wedge(de_1\cdot e'_{n-1})\wedge\cdots\\
\wedge(de_{n-2}\cdot e'_{n-1}).
\end{aligned}\tag{6.9.12}$$

上式两边同乘以 dT_{01} 并利用(6.9.8)式，最后得到

$$dT_{01}\wedge dK_1=\sin^{n-1}\varphi\,d\varphi\wedge dT_1\wedge dT_0. \tag{6.9.13}$$

6.9.2 陈省身-严志达运动基本公式

现在我们来介绍 n 维欧氏空间中的运动基本公式，即陈省身-严志达运动基本公式。这一公式是 E_n 积分几何最基本的定理，

它在精神实质上酷似于 E_2 和 E_3 中之 Blaschke 公式.

定理(陈省身、严志达) 设 D_0 和 D_1 为 E_n 中二区域,它们的边界 ∂D_0 和 ∂D_1 是 C^2 类超曲面. 设 D_0 为定区域, D_1 为动区域,并且假定对于 D_1 的任何位置交集 $D_1\cap D_0$ 由有限个子区域组成. ∂D_0 和 ∂D_1 的平均曲率积分分别记为 M_i^0 和 M_i^1. V_0 和 V_1 分别是 D_0 和 D_1 的体积. dK_1 表示 D_1 的运动密度. 则有 E_n 中运动基本公式

$$\begin{aligned}&\int_{D_1\cap D_0\neq\emptyset}\chi(D_1\cap D_0)dK_1\\&=O_1\cdots O_{n-2}\Big[O_{n-1}\chi(D_0)V_1+O_{n-1}\chi(D_1)V_0\\&\quad+\frac{1}{n}\sum_{h=0}^{n-2}\binom{n}{h+1}M_h^0M_{n-h-2}^1\Big],\end{aligned}\tag{6.9.14}$$

其中 $\chi(\cdot)$ 表示相应区域的 Euler-Poincaré 示性数.

证明 在左方的积分中, dK_1 的"权"是 $\chi(D_1\cap D_0)$,它反映出(对于该位置的 D_1) 交集 $D_1\cap D_0$ 的"块数". 证明就从仔细分析 $\chi(D_1\cap D_0)$ 开始.

由(6.4.6)式,有

$$\chi(D_1\cap D_0)=(1/O_{n-1})M_{n-1}(\partial(D_1\cap D_0)),\tag{6.9.15}$$

其中 $M_{n-1}(\partial(D_1\cap D_0))$ 是 $\partial(D_1\cap D_0)$ 的第 $(n-1)$ 阶平均曲率积分,即 $\partial(D_1\cap D_0)$ 的球面象的体积,亦即所谓 Gauss-Kronecker 曲率积分. 交集 $D_1\cap D_0$ 的边界 $\partial(D_1\cap D_0)$ 由有限块组成,它们可分为三部分:含于 D_1 中的 ∂D_0, 即 $\partial D_0\cap D_1$; 含于 D_0 中的 ∂D_1, 即 $D_0\cap\partial D_1$; 由 ∂D_1 与 ∂D_0 交成的一些 $(n-2)$ 维的棱. 我们有

$$\begin{aligned}M_{n-1}(\partial(D_1\cap D_0))&=M_{n-1}(\partial D_0\cap D_1)+M_{n-1}(D_0\cap\partial D_1)\\&\quad+M_{n-1}(\partial D_1\cap\partial D_0).\end{aligned}\tag{6.9.16}$$

余下的工作是分别算出上式右方三个部分的积分.

1. $M_{n-1}(\partial D_1\cap\partial D_0)$ 的积分

$M_{n-1}(\partial D_1\cap\partial D_0)$ 是 $\partial D_1\cap\partial D_0$ 的球面象的体积. 让我们先明确一下所谓 $\partial D_1\cap\partial D_0$ 的球面象是什么. 设 x 为 $\partial D_1\cap\partial D_0$ 上的

流动点，在 x 点分别作出 ∂D_0 和 ∂D_1 的外法线，介于此二外法线之间的那些向量的球面象称为 $\partial D_1 \cap \partial D_0$ 的球面象. 它类似于 2 维情况下曲线角点处外角所对应的切线象.

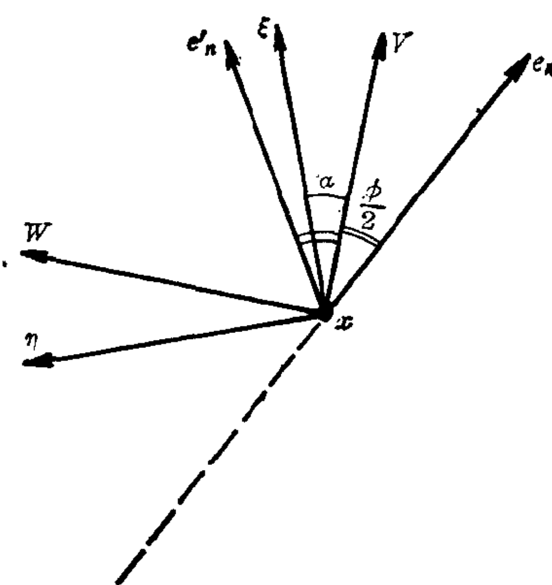


图 6-2

为了计算 $\partial D_1 \cap \partial D_0$ 的球面象的体积，关键在于找出此球面象体积元的表达式. 设 e_n, e_n' 分别为 ∂D_0, ∂D_1 在点 x 处之单位法向量，方向与外法线一致. 在 e_n, e_n' 所决定的平面上，e_n 与 e_n' 的夹角的内、外角分角线方向上的单位向量记为 V, W, 并以 ϕ 表示 e_n 与 e_n' 间的角. 则有

$$\begin{cases} e_n = \left(\cos\dfrac{\phi}{2}\right)V - \left(\sin\dfrac{\phi}{2}\right)W, \\ e_n' = \left(\cos\dfrac{\phi}{2}\right)V + \left(\sin\dfrac{\phi}{2}\right)W. \end{cases} \tag{6.9.17}$$

从而

$$\begin{cases} V = \left[2\cos\left(\dfrac{\phi}{2}\right)\right]^{-1}(e_n + e_n'), \\ W = \left[2\sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)\right]^{-1}(e_n' - e_n). \end{cases} \tag{6.9.18}$$

假设 ξ 为 e_n 与 e_n' 间的任意单位向量，ξ 与 V 的夹角为 α,

$$\xi = (\cos\alpha)V + (\sin\alpha)W, \tag{6.9.19}$$

α 的变域为 $-\phi/2 \leqslant \alpha \leqslant \phi/2$. 与此同时，用下式定义单位向量 η:

$$\eta = (-\sin\alpha)V + (\cos\alpha)W, \quad -\phi/2 \leqslant \alpha \leqslant \phi/2. \tag{6.9.20}$$

这样，我们就构成了一正交标准化标架$(x;\ \xi,\ e_1,\ \cdots,\ e_{n-2},\ \eta)$. 我们所要寻求的 $\partial D_1 \cap \partial D_0$ 的球面象之体积元，就是向量 ξ 终端之体积元 du_{n-1}. 由(6.1.19)式,

$$du_{n-1}=\omega_{21}\wedge\omega_{31}\wedge\cdots\wedge\omega_{n1}$$
$$=(d\xi\cdot e_1)\wedge\cdots\wedge(d\xi\cdot e_{n-2})\wedge(d\xi\cdot\eta)$$
$$=\bigwedge_{i=1}^{n-2}[\cos\alpha(dV\cdot e_i)+\sin\alpha(dW\cdot e_i)]\wedge d\alpha. \qquad (6.9.21)$$

利用(6.9.18)式，有

$$\cos\alpha(dV\cdot e_i)+\sin\alpha(dW\cdot e_i)$$
$$=\cos\alpha[2\cos(\phi/2)]^{-1}(de_n+de_n')\cdot e_i$$
$$+\sin\alpha[2\sin(\phi/2)]^{-1}(de_n'-de_n)\cdot e_i$$
$$=\frac{\sin\left(\frac{\phi}{2}-\alpha\right)}{\sin\phi}(de_n\cdot e_i)+\frac{\sin\left(\frac{\phi}{2}+\alpha\right)}{\sin\phi}(de_n'\cdot e_i). \qquad (6.9.22)$$

将此式代入(6.9.21)式，则有

$$du_{n-1}=\frac{1}{\sin^{n-2}\phi}\bigwedge_{i=1}^{n-2}\left[\sin\left(\frac{\phi}{2}-\alpha\right)(de_n\cdot e_i)\right.$$
$$\left.+\sin\left(\frac{\phi}{2}+\alpha\right)(de_n'\cdot e_i)\right]\wedge d\alpha. \qquad (6.9.23)$$

下面我们要把(6.9.23)式所给出的 du_{n-1} 表示式转化成另外的形式，使之与 ∂D_0、∂D_1 的诸主曲率联系起来．显然，这样一来离我们的目标更近一些．设 $V_1, \cdots, V_{n-1}$ 是 ∂D_1 在 x 处 $(n-1)$ 个主方向上的单位向量，$V_1', \cdots, V_{n-1}'$ 是 ∂D_0 在 x 处 $(n-1)$ 个主方向上的单位向量．由于 $(x; e_1, \cdots, e_{n-1})$ 和 $(x; V_1, \cdots, V_{n-1})$ 都是 ∂D_1 在 x 处的切空间中正交标准化标架，$(x; e_1, \cdots, e_{n-2}, e_{n-1}')$ 和 $(x; V_1', \cdots, V_{n-1}')$ 都是 ∂D_0 在 x 处的切空间中正交标准化标架，因此有

$$e_i=\sum_{h=1}^{n-1}c_{ih}V_h,\ i=1, \cdots, n-1, \qquad (6.9.24)$$

$$e_i=\sum_{h=1}^{n-1}c_{ih}'V_h'(i=1, \cdots, n-2),\ e_{n-1}'=\sum_{h=1}^{n-1}c_{n-1,h}'V_h', \qquad (6.9.25)$$

其中系数矩阵 (c_{ih}) 和 (c_{ih}') 为正交矩阵，并且

$$V_h=\sum_{i=1}^{n-1}c_{ih}e_i,\ h=1, \cdots, n-1, \qquad (6.9.26)$$

$$V_h' = \sum_{i=1}^{n-2} c_{ih}' e_i + c_{n-1,h}' e_{n-1}'. \tag{6.9.27}$$

根据关于 E_n 中超曲面 ∂D_1 的 Rodriques 公式，有

$$V_h \cdot de_n = -\varkappa_h (dx \cdot V_h), \tag{6.9.28}$$

其中 $\varkappa_h$ 为 ∂D_1 在 x 处相应于主方向 V_h 的主曲率．因此，由(6.9.24)～(6.9.28)诸式，有

$$\begin{aligned} de_n \cdot e_i &= \sum_{h=1}^{n-1} c_{ih}(de_n \cdot V_h) = -\sum_{h=1}^{n-1} c_{ih}\varkappa_h (dx \cdot V_h) \\ &= -\sum_{h,j=1}^{n-1} c_{ih}\varkappa_h c_{jh}(dx \cdot e_j). \end{aligned} \tag{6.9.29}$$

对于 ∂D_0 类似地可得

$$de_n' \cdot e_i = \sum_{h=1}^{n-1} c_{ih}'\varkappa_h' \left(\sum_{j=1}^{n-2} c_{jh}'(dx \cdot e_j) + c_{n-1,h}'(dx \cdot e_{n-1}') \right), \tag{6.9.30}$$

其中 $\varkappa_h'$ 为 ∂D_0 在 x 处相应于主方向 V_h' 的主曲率．利用(6.9.29)和(6.9.30)二式，并注意到 $dx \cdot e_{n-1}=0$, $dx \cdot e_{n-1}'=0$(因为 dx 属于 $\partial D_1 \cap \partial D_0$ 在 x 处的切空间)，从而得到

$$\begin{aligned} &\sin\left(\frac{\phi}{2}-\alpha\right)(de_n \cdot e_i) + \sin\left(\frac{\phi}{2}+\alpha\right)(de_n' \cdot e_i) \\ &= -\sum_{j=1}^{n-2}\left[\sin\left(\frac{\phi}{2}-\alpha\right)\sum_{h=1}^{n-1} c_{ih}c_{jh}\varkappa_h \right. \\ &\qquad \left. + \sin\left(\frac{\phi}{2}+\alpha\right)\sum_{h=1}^{n-1} c_{ih}'c_{jh}'\varkappa_h'\right](dx \cdot e_j). \end{aligned} \tag{6.9.31}$$

置

$$H_{ij} = -\sin\left(\frac{\phi}{2}-\alpha\right)\sum_{h=1}^{n-1} c_{ih}c_{jh}\varkappa_h - \sin\left(\frac{\phi}{2}+\alpha\right)\sum_{h=1}^{n-1} c_{ih}'c_{jh}'\varkappa_h'. \tag{6.9.32}$$

将(6.9.31)、(6.9.32)二式代入(6.9.23)式，不计符号，得到

$$\begin{aligned} du_{n-1} = \frac{1}{\sin^{n-2}\phi} \bigwedge_{i=1}^{n-2}\left(\sum_{j=1}^{n-2} H_{ij}\right) \wedge (dx \cdot e_1) \wedge \cdots \\ \wedge (dx \cdot e_{n-2}) \wedge d\alpha. \end{aligned} \tag{6.9.33}$$

式中 $(dx \cdot e_1) \wedge \cdots \wedge (dx \cdot e_{n-2}) = d\sigma_{n-2}$ 为 $\partial D_1 \cap \partial D_0$ 之体积元．又，记

$$H=\bigwedge_{i=1}^{n-2}\left(\sum_{j=1}^{n-2}H_{ij}\right). \tag{6.9.34}$$

则(6.9.33)式变成

$$du_{n-1}=\frac{H}{\sin^{n-2}\phi}\,d\sigma_{n-2}\wedge d\alpha \tag{6.9.35}$$

由(6.9.32)、(6.9.34)二式可见 H 呈下述形状:

$$H=\sum_{p=0}^{n-2}H_p\sin^{n-2-p}\left(\frac{\phi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin^p\left(\frac{\phi}{2}+\alpha\right), \tag{6.9.36}$$

其中

$$H_p=\sum_{i_n,j_m}A_{i_1\cdots i_q j_1\cdots j_p}\varkappa_{i_1}\cdots\varkappa_{i_q}\varkappa'_{j_1}\cdots\varkappa'_{j_p}. \tag{6.9.37}$$

和式(6.9.37)就一切可能的组合 $(i_1, \cdots, i_q)$、$(j_1, \cdots, j_p)$ 求和, $p+q=n-2$. 让我们对 H_p 的构成情况稍加剖析. H_p 是形如

$$A_{i_1\cdots i_q j_1\cdots j_p}\varkappa_{i_1}\cdots\varkappa_{i_q}\varkappa'_{j_1}\cdots\varkappa'_{j_p}$$

的一些项的和,其中乘积 $\varkappa_{i_1}\cdots\varkappa_{i_q}\varkappa'_{j_1}\cdots\varkappa'_{j_p}$ 与 ∂D_0、∂D_1 有关, 而系数 $A_{i_1\cdots i_q j_1\cdots j_p}$ 是 c_{ih}、c'_{ih} 的函数,仅依赖于 ∂D_1 的相对方位,对于任何一组超曲面偶 ∂D_0, ∂D_1 它们是一样的.

由(6.9.35)式得到

$$M_{n-1}(\partial D_1\cap\partial D_0)=\int\frac{H}{\sin^{n-2}\phi}\,d\sigma_{n-2}\wedge d\alpha, \tag{6.9.38}$$

积分域为: $-\phi/2\leqslant\alpha\leqslant\phi/2$, 其余变量展布于 $\partial D_1\cap\partial D_0$ 上.

于(6.9.38)式两边同乘以 $dK_1\wedge du_{n-3}\wedge\cdots\wedge du_1$, 然后考虑双方的积分. 左方的积分为

$$O_{n-3}\cdots O_1\int_{\partial D_1\cap\partial D_0\neq\emptyset}M_{n-1}(\partial D_1\cap\partial D_0)dK_1.$$

利用关系(见(6.9.3)式)

$$dT_{01}=\bigwedge_i(dx\cdot e_i)\bigwedge_{h<j}(e_h\cdot de_j)=d\sigma_{n-2}\wedge du_{n-3}\wedge\cdots\wedge du_1$$

和密度公式(6.9.13)

$$dT_{01}\wedge dK_1=\sin^{n-1}\phi\,d\phi\wedge dT_1\wedge dT_0,$$

推知右方积分为

$$\int_{\partial D_1\cap\partial D_0\neq\emptyset}H\sin\phi\,d\phi\wedge d\alpha\wedge dT_1\wedge dT_0.$$

从而有

$$\int_{\partial D_1\cap\partial D_0\neq\emptyset} M_{n-1}(\partial D_1\cap\partial D_0)dK_1$$

$$=(O_{n-3}\cdots O_1)^{-1}\int_{\partial D_1\cap\partial C_0\neq\emptyset} H\sin\phi\, d\phi\wedge d\alpha\wedge dT_1\wedge dT_0, \tag{6.9.39}$$

其中 dT_0, dT_1 分别为 $\partial D_0, \partial D_1$ 上的运动密度，其定义见(6.9.2)、(6.9.1)二式. dT_0, dT_1 亦可表示为下述形式：

$$dT_0=d\sigma_{n-1}^0\wedge du_{n-2}\wedge\cdots\wedge du_1,$$

$$dT_1=d\sigma_{n-1}^1\wedge du_{n-2}\wedge\cdots\wedge du_1,$$

其中 $d\sigma_{n-1}^k$ $(k=0,\ 1)$ 表示 ∂D_k 在 x 处的切空间在点 x 处的体积元. 现在我们来考虑(6.9.39)式右方的积分. 首先，让 x 固定，对含 x 的 ∂D_1 之一切位置进行积分；然后，让 x 在 ∂D_0 上流动，再积分. 同时留意到 H_p 的构成情况. 最后可得到

$$\int_{\partial D_1\cap\partial D_0\neq\emptyset} M_{n-1}(\partial D_1\cap\partial D_0)dK_1=\sum_{p=0}^{n-2}c_pM_p^0M_{n-2-p}^1, \tag{6.9.40}$$

其中 M_p^0, M_{n-2-p}^1 分别为 ∂D_0 和 ∂D_1 的平均曲率积分，c_p 为常数.

2. $M_{n-1}(\partial D_0\cap D_1)$和 $M_{n-1}(D_0\cap\partial D_1)$的积分

首先考虑 $M_{n-1}(\partial D_0\cap D_1)$ 的积分. 设 $P\in\partial D_0\cap D_1$，并以 $du_{n-1}(P)$ 表示 $\partial D_0\cap D_1$ 的球面象在与 P 相对应的点处的体积元. 今依不同之次序考虑 $du_{n-1}(P)\wedge dK_1$ 的积分. 第一种方案，首先对于致 $D_1\cap D_0\neq\emptyset$ 的任意固定的 D_1，让 P 在 $\partial D_0\cap D_1$ 上流动以计算 $du_{n-1}(P)$的积分，然后将所得结果在 $\{D_1;\ D_1\cap D_0\neq\emptyset\}$ 上积分. 我们有

$$\int_{D_1\cap D_0\neq\emptyset}\left(\int_{P\in\partial D_0\cap D_1} du_{n-1}(P)\right)dK_1$$

$$=\int_{D_1\cap D_0\neq\emptyset} M_{n-1}(\partial D_0\cap D_1)dK_1. \tag{6.9.41}$$

第二种方案，首先让 P 点固定，考虑在 $\{D_1:\ P\in D_1\}$ 上的积分，然后再计算在 $\{P;\ P\in\partial D_0\}$ 上的积分. 我们有

$$\int_{P\in\partial D_0}\left(\int_{P\in D_1} dK_1\right)du_{n-1}=O_{n-1}\cdots O_1V_1M^0_{n-1}, \qquad (6.9.42)$$

其中 $M^0_{n-1}=M_{n-1}(\partial D_0)$ 即 D_0 之表面积，V_1 为 D_1 之体积. 由(6.9.41)和(6.9.42)二式，得到

$$\int_{D_1\cap D_0\neq\emptyset} M_{n-1}(\partial D_0\cap D_1)dK_1=O_{n-1}\cdots O_1V_1M^0_{n-1}. \qquad (6.9.43)$$

交换 D_1 与 D_0 的地位，据运动密度的反演不变性，可得

$$\int_{D_0\cap D_1\neq\emptyset} M_{n-1}(D_0\cap\partial D_1)dK_1=O_{n-1}\cdots O_1V_0M^1_{n-1}, \qquad (6.9.44)$$

其中 $M^1_{n-1}=M_{n-1}(\partial D_1)$，$V_0$ 为 D_0 之体积.

3．公式的形成与常数 c_p 的确定

由(6.9.15)，(6.9.16)，(6.9.40)，(6.9.43)和(6.9.44)诸式，得到

$$\int_{D_1\cap D_0\neq\emptyset}\chi(D_1\cap D_0)dK_1=O_{n-1}\cdots O_1[V_1\chi(D_0)+V_0\chi(D_1)] + \sum_{p=0}^{n-2}c_pM^0_pM^1_{n-2-p}. \qquad (6.9.45)$$

余下的工作是确定诸常数 c_p. 前面曾经说过，这些常数不依赖于 D_0, D_1 的具体选择. 今取 D_0 为凸体，并以半径等于 ρ 的球作为 D_1. 这时，

$$\chi(D_0)=\chi(D_1)=\chi(D_1\cap D_0)=1.$$

从而(6.9.45)式成为

$$V((D_0)_\rho)O_{n-1}\cdots O_1=O_{n-1}\cdots O_1(V_1+V_0) + \sum_{p=0}^{n-2}c_pM^0_pM^1_{n-2-p}. \qquad (6.9.46)$$

由(6.4.13)、(6.4.16)二式，有

$$M^1_{n-2-p}=O_{n-1}\rho^{p+1}.$$

又，由(1.5.1)式，有

$$V_1=(O_{n-1}/n)\rho^n.$$

将它们代入(6.9.46)式，得到

$$V((D_0)_\rho)=V_0+\sum_{p=0}^{n-2}\frac{\rho^{p+1}}{O_{n-2}\cdots O_1}\ c_pM_p^0+\frac{O_{n-1}}{n}\rho^n. \tag{6.9.47}$$

另一方面,对凸体 D_0 运用(6.4.12)式,应有

$$V((D_0)_\rho)=V_0+\sum_{p=0}^{n-2}\frac{\rho^{p+1}}{p+1}\binom{n-1}{p}+\frac{\rho^n}{n}M_{n-1}^0. \tag{6.9.48}$$

顺便说一下,(6.9.47)与(6.9.48)右方最后一项其实是相同的,因为对于凸体 D_0 而言,由(6.4.7)式, $M_{n-1}^0=M_{n-1}(\partial D_0)=O_{n-1}$. 比较(6.9.47)与(6.9.48)二式,得到

$$c_p=\frac{O_{n-2}\cdots O_1}{p+1}\binom{n-1}{p}, \tag{6.9.49}$$

从而完成了定理的证明.

6.9.3 关于凸集的运动基本公式

当 D_0 和 D_1 皆为凸体时, 我们得到公式(6.9.14)的一个重要的特殊情形,即关于凸集的运动基本公式:

$$\int_{D_1\cap D_0\neq\emptyset}dK_1=O_{n-2}\cdots O_1\Big[O_{n-1}(V_0+V_1)+\frac{1}{n}\sum_{h=0}^{n-2}\binom{n}{h+1}M_h^0M_{n-2-h}^1\Big]. \tag{6.9.50}$$

利用平均曲率积分与均质积分的联系(见(6.4.13)式, 以及(6.3.13)、(6.3.14)二式),上式可转化为下述形式:

$$\int_{D_1\cap D_0\neq\emptyset}dK_1=O_{n-2}\cdots O_1\ \sum_{h=0}^{n}n\binom{n}{h}W_h^0W_{n-h}^1. \tag{6.9.51}$$

公式(6.9.50)或(6.9.51), 虽然是 E_n 中运动基本公式 (6.9.14)的特款,却十分重要,因为积分几何中接触得最多的是凸的对象.

另外,值得注意的是,在推导一般公式(6.9.14)时我们曾假定 ∂D_0 和 ∂D_1 是 C^2 类超曲面, 然而公式(6.9.50)或(6.9.51) 对于任何凸体 D_0, D_1 均成立,这是因为对于任何凸曲面恒可用光滑凸曲面逼近.

6.9.4 平均曲率积分的积分

由关系 $\chi(D_1\cap D_0)=(1/O_{n-1})M_{n-1}(\partial(D_1\cap D_0))$ ((6.9.15)式)可见，陈省身-严志达公式实质上给出的是 $M_{n-1}(\partial(D_1\cap D_0))$ 的积分值. 现在我们来讨论稍广一点的问题，即考虑下列积分

$$\int_{D_1\cap D_0\neq\emptyset} M_{q-1}(\partial(D_1\cap D_0))dK_1,\quad q=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1. \tag{6.9.52}$$

仅就凸的情形讨论如下.

作为讨论积分(6.9.52)的一项准备，让我们先考察一下当 D_1 为 E_n 中凸体、D_0 为 L_q 中凸集 D_0^q 时公式(6.9.50)的具体形式. 这种情况下，D_0^q 是 E_n 中平坦凸体，因此 $V_0=\sigma_n(D_0^q)=0$ 并且 ∂D_0^q 的平均曲率积分 M_h^0 应按照公式(6.4.34)、(6.4.35)和(6.4.36)进行计算:

当 $h\geqslant n-q$ 时，

$$M_h^0(\partial D_0^q)=\frac{\binom{q-1}{h-n-q}}{\binom{n-1}{h}}\cdot\frac{O_h}{O_{h-n+q}}M_{h-n+q}^{(q)}(\partial D_0^q);$$

当 $h=n-q-1$ 时，

$$M_{n-q-1}^0(\partial D_0^q)=\binom{n-1}{n-q-1}^{-1}O_{n-q-1}\sigma_q(D_0^q)$$
$$=\binom{n-1}{q}^{-1}O_{n-q-1}\sigma_q(D_0^q);$$

当 $h<n-q-1$ 时，

$$M_h^0(\partial D_0^q)=0.$$

将这些结果代入(6.9.50)式，则有

$$\int_{D_1\cap D_0^q\neq\emptyset}dK_1=O_{n-2}\cdots O_1\left[O_{n-1}V_1+\frac{\binom{n}{n-q}}{n\binom{n-1}{q}}O_{n-q-1}\sigma_q(D_0^q)M_{q-1}^1\right.$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{h=n-p}^{n-2}\binom{n}{h+1}\frac{\binom{q-1}{h+q-n}}{\binom{n-1}{h}}$$

$$\cdot\frac{O_h}{O_{h+q-n}}M_{h+q-n}^{0(q)}M_{n-2-h}^1\Bigg]. \qquad (6.9.53)$$

现在我们依两种不同的次序考虑积分

$$I=\int_{D_1\cap D_0\cap L_q\neq\emptyset}dK_1\wedge dL_q.$$

一种次序是：先让 D_1 固定，考虑 dL_q 在 $\{L_q\colon\ L_q\cap(D_1\cap D_0)\neq\emptyset\}$ 上的积分，然后再对一切致 $D_1\cap D_0\neq\emptyset$ 的 D_1 位置积分．利用(6.5.3)式，有

$$I=\frac{O_{n-2}\cdots O_{n-q-1}}{(n-q)O_{q-1}\cdots O_0}\int_{D_1\cap D_0\neq\emptyset}M_{q-1}(\partial(D_1\cap D_0))dK_1. \qquad (6.9.54)$$

另一种次序是：保持 L_q 固定，考虑 dK_1 在 $\{D_1\colon D_1\cap(L_q\cap D_0)\}$ 上的积分，然后再考虑 dL_q 在 $\{L_q\colon L_q\cap D_0\neq\emptyset\}$ 上的积分．注意，这时 $L_q\cap D_0$ 相当于(6.9.53)式中的 D_0^q．从而有

$$I=O_{n-2}\cdots O_1\int_{L_q\cap D_0\neq\emptyset}\Bigg[O_{n-1}V_1+\frac{\binom{n}{n-q}}{n\binom{n-1}{q}}O_{n-q-1}\sigma_q(L_q\cap D_0)M_{q-1}^1$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{h=n-q}^{n-2}\binom{n}{h+1}\frac{\binom{q-1}{h+q-n}}{\binom{n-1}{h}}$$

$$\cdot\frac{O_h}{O_{h+q-n}}M_{h+q-n}^{0(q)}(\partial(L_q\cap D_0))M_{n-2-h}^1\Bigg]dL_q, \qquad (6.9.55)$$

式中 $\sigma_q(L_q\cap D_0)$ 的积分可据 Santaló 公式(6.7.11)算出，即

$$\int_{L_q\cap D_0\neq\emptyset}\sigma_q(L_q\cap D_0)dL_q=\frac{O_n\cdots O_{n-q}O_q}{O_q\cdots O_0O_n}V_0. \qquad (6.9.56)$$

而 $M_{h+q-n}^{0(q)}(\partial(L_q\cap D_0))$ 的积分，由(6.5.12)式，应为

$$\int_{L_q \cap D_0 \neq \emptyset} M^{0(q)}_{h+q-n}(\partial(L_q \cap D_0))dL_q$$

$$= \frac{O_{n-2}\cdots O_{n-q}O_{2n-h-q}}{O_{q-2}\cdots O_0 O_{n-h}} M^0_{h+q-n}. \tag{6.9.57}$$

将(6.9.56)、(6.9.57)二式代入(6.9.55)式并与(6.9.54)式比较最后得到

$$\int_{D_1 \cap D_0 \neq \emptyset} M_{q-1}(\partial(D_1 \cap D_0))dK_1$$

$$= O_{n-2}\cdots O_1 \Big[O_{n-1}(V_1 M^0_{q-1} + V_0 M^1_{q-1})$$

$$+ \frac{(n-q)O_{q-1}}{O_{n-q-1}} \sum_{h=n-q}^{n-2} \frac{\binom{q-1}{q+h-n} O_{2n-h-q}O_h}{(h+1)O_{n-h}O_{h+q-n}} M^0_{h+q-n} M^1_{n-2-h} \Big],$$

$$q = 1, \cdots, n-1. \tag{6.9.58}$$

本章的内容,参考了[1]的第11～15章.

本章参考文献

[1] L. A. Santaló, «Integral Geometry and Geometric Probability», Addison-Wesley Publishing Company, 1976.

[2] L. A. Santaló, "On the mean curvatures of a flattened convex body", Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul 21(1956), 189～194.

[3] S. S. Chern, "On the kinematic formula in integral geometry", J. Math. and Mech. 16(1966), 101～118.

[4] L. A. Santaló, "Integral geometry in general spaces", Proc. Internat. Congr. Math., Cambridge, Mass., 1950, Vol. I, 483～489.

[5] 任德麟,关于陈省身的一个积分公式的几点注记,待发表.

[6] S. S. Chern and Chih-ta Yen(陈省身、严志达), "Formula principale cinematica dello spazio ad n dimensioni", Boll. Un. Mat. Ital. 2(1940), 434～437.

[7] S. S. Chern(陈省身), "On the kinematic formula in the Euclidean space of n dimensions", Amer. J. Math. 74(1952), 227～236.

第 七 章

积分几何的应用

在第六章中我们系统地论述了 n 维欧氏空间积分几何，本章集中讲这些理论的应用.

§7.1 三维欧氏空间积分几何概述

E_n 中积分几何自然包括 $n=3$ 的情形在内. 但是在三维欧氏空间的场合，有着更易把握的直观意义，实际应用也最广泛. 为了以下引述的方便，这一节对 E_3 中积分几何的主要内容作一概述.

7.1.1 E_3 中的运动群

设 $a=(a_{ij})$, $b=(b_i)$ 分别为 3×3, 3×1 矩阵. 由形如

$$x'=ax+b,\ aa^T=I \tag{7.1.1}$$

的矩阵方程定义的从 E_3 到其自身的变换构成一群，称为 E_3 中的运动群，记为 $\mathfrak{M}$. 它同构于以矩阵

$$g=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

为元素的矩阵群. 矩阵

$$g^{-1}dg=\begin{pmatrix} a^{-1}da & a^{-1}db \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的每个元都是左不变的，选出其中 $3(3+1)/2=6$ 个线性无关者即

$\mathfrak{M}$ 之一组 Maurer-Cartan 形式. 置

$$\Omega_1 = a^{-1}da, \quad \Omega_2 = a^{-1}db,$$

则结构方程为

$$d\Omega_1 = -\Omega_1 \wedge \Omega_1,\ d\Omega_2 = -\Omega_1 \wedge \Omega_2. \tag{7.1.2}$$

利用条件 $aa^T = I$, 有

$$\Omega_1 = a^{-1}da = a^T da = -da^T a = -\Omega_1^T,$$

即 Ω_1 是反称的. 置

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix},\quad \Omega_2 = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix},$$

其中 ω_{12}, ω_{13}, ω_{23}, ω_1, ω_2, ω_3 便是 $\mathfrak{M}$ 的一组 Maurer-Cartan 形式. 而结构方程则可明白表示如下:

$$\begin{cases} d\omega_{12} = -\omega_{13} \wedge \omega_{32}, \\ d\omega_{13} = -\omega_{12} \wedge \omega_{23}, \\ d\omega_{23} = -\omega_{21} \wedge \omega_{13}, \\ d\omega_1 = -\omega_{12} \wedge \omega_2 - \omega_{13} \wedge \omega_3, \\ d\omega_2 = \omega_{12} \wedge \omega_1 - \omega_{23} \wedge \omega_3, \\ d\omega_3 = \omega_{13} \wedge \omega_1 + \omega_{23} \wedge \omega_2. \end{cases} \tag{7.1.3}$$

设 $(p_0; e_1^0, e_2^0, e_3^0)$ 表示固定标架, $(p; e_1, e_2, e_3) = g(p_0; e_1^0, e_2^0, e_3^0)$ 为活动标架, 其中 $g \in \mathfrak{M}$. 这时有

$$dp = \sum_{i=1}^{3} \omega_i e_i,\ de_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ji} e_j,\ (i = 1, 2, 3). \tag{7.1.4}$$

利用 $e_i \cdot e_j = \delta_j^i$, 有

$$\omega_i = dp \cdot e_i,\ \omega_{ji} = de_i \cdot e_j,\ \omega_{ji} + \omega_{ij} = 0,\ i, j = 1, 2, 3. \tag{7.1.5}$$

据(6.1.18)、(6.1.21)二式, E_3 中绕定点旋转的旋转群的不变体积元为

$$d\mathfrak{M}_{[0]} = \omega_{12} \wedge \omega_{13} \wedge \omega_{23} = du_2 \wedge du_1, \tag{7.1.6}$$

其中 du_2 为 U_2 在 e_1 终端处之面积元, du_1 为 U_1 在 e_2 终端处之弧元(U_2 是球心在原点的单位球面, U_1 为 e_2 与 e_3 所决定的平面上以

原点为圆心的单位圆). 由(6.1.28)式, $\mathfrak{M}_{[O]}$ 的总体积为

$$m(\mathfrak{M}_{[O]}) = 2O_2O_1 = 16\pi^2, \tag{7.1.7}$$

若考虑的是特殊旋转群则应为 $8\pi^2$.

E_3 中运动群的运动密度为

$$d\mathfrak{M} = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_{12} \wedge \omega_{13} \wedge \omega_{23} = dP \wedge d\mathfrak{M}_{[O]}, \tag{7.1.8}$$

其中 $dP = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$ 为 E_3 中点的密度.

7.1.2 E_3 中直线和平面的密度

在 E_n 中我们讨论过 r 维平面的运动密度, 得到下面的公式(见(6.2.5)式):

$$dL_r = \bigwedge_{i,\beta} \omega_{i\beta} \bigwedge_{\alpha} \omega_\alpha, \quad \alpha, \beta = r+1, \cdots, n; i = 1, \cdots, r. \tag{7.1.9}$$

在 E_3 中相应的对象为 L_1 和 L_2, L_1 即 E_3 中直线有时简记为 G, 而 L_2 即 E_3 中平面有时简记为 E. 当 $r=1$ 时, (7.1.9)式给出

$$dG = dL_1 = \omega_{12} \wedge \omega_{13} \wedge \omega_2 \wedge \omega_3. \tag{7.1.10}$$

当 $r=2$ 时, (7.1.9)给出

$$dE = dL_2 = \omega_{13} \wedge \omega_{23} \wedge \omega_3. \tag{7.1.11}$$

在6.2.4段中我们介绍过 dL_r 的另一表达形式. 假定 $L_{n-r[O]}$ 为过定点 O 而垂直于 L_r 的 $(n-r)$ 维平面, $p = L_r \cap L_{n-r[O]}$. 以 $d\sigma_{n-r}$ 表示 $L_{n-r[O]}$ 在 p 点的体积元, 则有((6.2.19)式)·

$$dL_r = d\sigma_{n-r} \wedge dL_{n-r[O]}. \tag{7.1.12}$$

具体化到 E_3 的情形, 有 $r=1$ 和 $r=2$ 二款. 当 $r=1$ 时,

$$dL_1 = d\sigma_2 \wedge dL_{2[O]}, \tag{7.1.13}$$

其中 $L_{2[O]}$ 为过 O 而垂直于直线 L_1 的平面 (交点记为 p), $d\sigma_2$ 为 $L_{2[O]}$ 在 p 点处之体积元. $dL_{2[O]} = dL_{1[O]}$, 等于 U_2 在平行 L_1 的 e_1 之终端处面积元. 故(7.1.13)式亦可写作

$$dL_1 = d\sigma_2 \wedge du_2. \tag{7.1.14}$$

当 $r=2$ 时,

$$dL_2 = d\sigma_1 \wedge dL_{1[O]}, \tag{7.1.15}$$

其中 $L_{1[O]}$ 为过 O 而垂直于平面 L_2 之直线. 以 p 表示垂足, O 到

p 的距离记为 ρ. $d\sigma_1$ 是 $L_{1[O]}$ 在 p 处之体积元(一维体积元)，即 $d\rho$. $dL_{1[O]}$ 为 U_2 在垂直于 L_2 的 e_3 之终端处的面积元. 因此(7.1.15)式变成

$$dL_2 = d\rho \wedge du_2. \tag{7.1.16}$$

公式(7.1.14)和(7.1.16)中都涉及到球面 U_2 的面积元 du_2. 若单位向量 ν 的终端之球面坐标为$(1, \phi, \theta)$，则 ν 的方向余弦为

$$\nu_1 = \sin\theta\cos\phi,\ \nu_2 = \sin\theta\sin\phi,\ \nu_3 = \cos\theta. \tag{7.1.17}$$

而 U_2 在 ν 的终端处的面积元为

$$du_2 = \sin\theta\, d\theta \wedge d\phi. \tag{7.1.18}$$

由(7.1.17)式,此面积元亦可表示为

$$du_2 = \frac{d\nu_2 \wedge d\nu_3}{\nu_1} = \frac{d\nu_3 \wedge d\nu_1}{\nu_2} = \frac{d\nu_1 \wedge d\nu_2}{\nu_3}. \tag{7.1.19}$$

相应于 E_3 中平面和直线的不同的给定方式，可得到平面和直线的密度若干具体表示形式.

设原点 O 到平面 E 的距离为 ρ, ν 为起点在原点而垂直于 E 的单位向量，ν 的终端的球坐标为$(1, \phi, \theta)$，则由(7.1.16)和(7.1.18)二式,有

$$dE = \sin\theta\, d\rho \wedge d\theta \wedge d\phi. \tag{7.1.20}$$

设平面 E 由方程 $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ 确定，ρ 之意义如前. 则此平面的法向量的方向余弦为 $\rho\alpha$, $\rho\beta$, $\rho\gamma$. 又，若垂直于 E 的单位向量 ν 的终端之球坐标为$(1, \phi, \theta)$. 则有

$$\begin{cases} \alpha = \rho^{-1}\sin\theta\cos\phi, \\ \beta = \rho^{-1}\sin\theta\sin\phi, \\ \gamma = \rho^{-1}\cos\theta. \end{cases}$$

于是 $$d\alpha \wedge d\beta \wedge d\gamma = \rho^{-4}\sin\theta\, d\rho \wedge d\theta \wedge d\phi.$$

由此得到

$$dE = \frac{d\alpha \wedge d\beta \wedge d\gamma}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2}. \tag{7.1.21}$$

若平面方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, 则由(7.1.21)式,有

$$dE = \frac{a^2b^2c^2\, da \wedge db \wedge dc}{(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)^2}. \tag{7.1.22}$$

设直线 G 与 xoy 平面之交点为 $(x,\ y)$，G 与 oz 轴的夹角为 γ. 又，若 π 为过 $(x,\ y)$ 点而垂直于 G 的平面. 显然 π 与 xoy 的夹角亦为 γ. 从而平面 π 在 $(x,\ y)$ 处的面积元为

$$d\sigma_2 = \cos\gamma\, dx \wedge dy. \tag{7.1.23}$$

由(7.1.14)式，有

$$dG = \cos\gamma\, dx \wedge dy \wedge du_2, \tag{7.1.24}$$

其中 du_2 为 U_2 在平行于 G 的单位向量终端处的面积元. 若已知 G 的方向余弦为 $\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3$. 由(7.1.19)式，有

$$du_2 = (d\nu_1 \wedge d\nu_2)/\nu_3.$$

另一方面，$\nu_3 = \cos\gamma$. 于是由(7.1.24)式，有

$$dG = d\nu_1 \wedge d\nu_2 \wedge dx \wedge dy. \tag{7.1.25}$$

若直线 G 由 $x = az + p,\ y = bz + q$ 给出. 显然，直线 G 与 xoy 平面的交点为 $(p,\ q)$，而 G 的方向余弦为

$$\nu_1 = a(1 + a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}},\quad \nu_2 = b(1 + a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\nu_3 = (1 + a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

利用(7.1.25)式立即得到

$$dG = (1 + a^2 + b^2)^{-2}\, da \wedge db \wedge dp \wedge dq. \tag{7.1.26}$$

7.1.3 一些基本公式

第六章中所介绍的 E_n 中的各个积分公式，特殊化到三维欧氏空间均有十分直观的几何意义. 今摘要概述如次（其中有一些前面已经提到过）.

若以 F 表示 E_3 中凸体 K 的表面积，F_u 表示投影面积，则有（见(6.3.20)式）

$$F = \frac{1}{\pi}\int_{U_2} F_u\, du_2. \tag{7.1.27}$$

关于平均曲率积分，有公式（见(6.4.25)式）

$$M=\frac{1}{2\pi}\int_{U_2} L_u\, du_2 \tag{7.1.28}$$

及(见(6.4.26)式)

$$M=\frac{1}{2}\int_{U_2} \Delta\, du_2. \tag{7.1.29}$$

公式(6.5.3)、(6.7.11)具体应用于 E_3 中的凸体 K 或其边界 ∂K，则有如下一些公式(V, F 依次表示 K 的体积和表面积)：

$$\int_{L_2\cap K\neq\emptyset} dL_2=M, \tag{7.1.30}$$

$$\int_{L_1\cap K\neq\emptyset} \sigma_1(L_1\cap K)\,dL_1=2\pi V, \tag{7.1.31}$$

$$\int_{L_1\cap K\neq\emptyset} dL_1=\frac{\pi}{2}F, \tag{7.1.32}$$

$$\int_{L_2\cap K\neq\emptyset} \sigma_2(L_2\cap K)\,dL_2=2\pi V, \tag{7.1.33}$$

$$\int_{L_2\cap K\neq\emptyset} \sigma_1(L_2\cap\partial K)\,dL_2=\frac{\pi^2}{2}F. \tag{7.1.34}$$

E_3 中的运动基本公式——Blaschke 公式为

$$\int_{D_1\cap D_0\neq\emptyset} \chi(D_1\cap D_0)\,dK_1=8\pi^2(V_0\chi(D_1)+V_1\chi(D_0))+2\pi(F_0M^1+F_1M^0). \tag{7.1.35}$$

对于 E_3 中的凸体 K_0, K_1, 则有

$$\int_{K_1\cap K_0\neq\emptyset} dK_1=8\pi^2(V_0+V_1)+2\pi(F_0M^1+F_1M^0). \tag{7.1.36}$$

若 D_1 是凸体 K_1(K_1 的体积、表面积及 ∂K_1 的平均曲率积分仍分别记为 V_1、F_1 及 M^1)，而 D_0 由 m 个全等于凸体 K 的凸体组成，这 m 个凸体的内部彼此不重叠，并以 V、F 及 M 依次表示 K 的体积、表面积及边界的平均曲率积分. 显然，$\chi(D_1\cap D_0)$ 正好是 D_0 中与 D_1 相交的凸体的个数，记为 N，它依赖于 D_1 的位置. 运用(7.1.35)式，有

$$\int N\,dK_1=2\pi m[4\pi(V+V_1)+FM^1+F_1M]. \tag{7.1.37}$$

公式(6.9.16)给出下列具体结果:

$$\int_{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset} V_{01}\, dK_1 = 8\pi^2 V_0 V_1, \tag{7.1.38}$$

$$\int_{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset} F_{01}\, dK_1 = 8\pi^2 (F_0 V_1 + F_1 V_0), \tag{7.1.39}$$

$$\int_{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset} M_{01}\, dK_1 = 8\pi^2 (V_1 M^0 + V_0 M^1) + (\pi^4/2) F_0 F_1, \tag{7.1.40}$$

其中 V_{01} 表示交集 $K_1 \cap K_0$ 的体积, F_{01} 和 M_{01} 分别表示 $\partial(K_1 \cap K_0)$ 的面积和平均曲率积分.

7.1.4 动图形是凸柱体的情形

设 K_0 为 E_3 中凸体, 动图形是凸柱体. 我们希望寻求在这种情形下运动基本公式的具体形状以及其他一些积分公式.

设 O 为 E_3 中一定点, $L_{3-p[O]}$ 表示过点 O 的 $(3-p)$ 维平面 ($p=1$, $L_{3-p[O]}=L_{2[O]}$ 即过点 O 之平面; $p=2$, $L_{3-p[O]}=L_{1[O]}$ 为过点 O 之直线). 假定 D_{3-p} 是 $L_{3-p[O]}$ 上有界凸集. 过每点 $x \in D_{3-p}$ 引正交于 $L_{3-p[O]}$ 的 L_p. 一切这样的 L_p 组成柱体 Z_p. 若任意固定 $L_{3-p[O]}$, 则柱体的位置取决于 D_{3-p} 在 $L_{3-p[O]}$ 上的位置. 故柱体 Z_p 的运动密度应为

$$dZ_p = dL^*_{3-p[O]} \wedge dK^{3-p}, \tag{7.1.41}$$

其中 $L_{3-p[O]}$ 是定向的, 而 dK^{3-p} 表示空间 $L_{3-p[O]}$ 中的运动密度. 从另一角度看, 若任意固定上述某个 L_p, 则柱体的位置由绕 L_p 的旋转所确定. 从而有

$$dZ_p = dL^*_p \wedge dK_{[p]}, \tag{7.1.42}$$

其中 $dK_{[p]}$ 表示绕 L_p 旋转的密度. 又, 若以 dK^p 表示 L_p 上的运动密度, 则 E_3 中运动群的运动密度 dK 显然可表示为

$$dK = dL^*_p \wedge dK_{[p]} \wedge dK^p = dZ_p \wedge dK^p. \tag{7.1.43}$$

柱体 Z_p 的形状完全取决于其正截面 D_{3-p} 的形状. 我们用 ∂D_{3-p} (作为 $L_{3-p[O]}$ 中的流形) 的平均曲率积分作为柱体 Z_p 的平均曲率积分之定义.

以上我们求出了柱体 Z_p 的运动密度形式及其与 E_3 中运动群的运动密度之间的联系，并且定义了柱体(或柱面)的平均曲率积分. 下面就 $p=1$ 和 $p=2$ 两种情况分别导出以柱体为动图形的一些积分公式.

当 $p=1$ 时，$L_{3-p[O]}=L_{2[O]}$ 是过点 O 的平面，而 D_{3-p} 即平面 $L_{2[O]}$ 上某个有界凸域. 此时 Z_1 正是通常的柱体. 在过 $x\in D_{3-p}$ 而垂直于 $L_{2[O]}$ 的 L_1 上截取出以 x 为中点的、长度等于 2ρ 的区间. 对每个 L_1 都这样处理，便得到一个正截面为 D_{3-p}、高为 2ρ 的柱体，记为 $Z_1(\rho)$. 取 $Z_1(\rho)$ 作为 K_1，运用公式(7.1.36)及 dK_1 的表示式(7.1.43)，然后令 $\rho\to\infty$ 取极限，得到

$$\begin{aligned}\int_{Z_1\cap K_0\neq\emptyset} dZ_1=&\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{2\rho}\Big\{8\pi^2(V_0+2\rho f)\\&+2\pi\Big[F_0\left(\frac{1}{2}\pi L+2\pi\rho\right)+(2\rho L+2f)M^0\Big]\Big\}\\=&2\pi(\pi F_0+4\pi f+M^0L),\end{aligned}\tag{7.1.44}$$

其中 F_0，M^0 依次表示 ∂K_0 的面积和平均曲率积分，而 f 和 L 分别表示柱体正截面的面积和周长. 注意(7.1.44)式中用到了正柱体平均曲率积分公式(6.4.30).

用类似的推理由(7.1.38)、(7.1.39)和(7.1.40)三式可以得到如下几个公式:

$$\int_{Z_1\cap K_0\neq\emptyset} V_{01}\,dZ_1=8\pi^2V_0f,\tag{7.1.45}$$

$$\int_{Z_1\cap K_0\neq\emptyset} F_{01}\,dZ_1=8\pi^2(F_0f+V_0L),\tag{7.1.46}$$

$$\int_{Z_1\cap K_0\neq\emptyset} M_{01}\,dZ_1=2\pi^2\Big(4M^0f+4\pi V_0+\frac{1}{4}\pi^2F_0L\Big).\tag{7.1.47}$$

当 $p=2$ 时，$L_{3-p[O]}=L_{1[O]}$ 是过定点之直线，而 D_{3-p} 这时应是 $L_{1[O]}$ 上一线段 S. 以 Δ 表示线段 S 的长度. 此时柱体 Z_2 实际上是 E_3 中二平行平面构成的宽度等于 Δ 的带域 B. 类似于 Z_1 的情形，在垂直于 $L_{1[O]}$ 的平面 L_2 上以 $x\in S$ 为圆心作半径为 ρ 的圆

盘，这样将形成柱体 $Z_2(\rho)$. 以 $Z_2(\rho)$ 作为 K_1，利用密度关系 $dK_1 = dB \wedge dK^2$ 和公式(7.1.36)，然后令 $\rho \to \infty$ 取极限，可得

$$\int_{B \cap K_0 \neq \varnothing} dB = \lim_{\rho \to \infty} \frac{1}{4\pi^2 \rho^2} \Big\{ 8\pi^2 (V_0 + \pi \rho^2 \Delta) + 2\pi \Big[F_0 \left(\frac{1}{2}\pi \cdot 2\pi\rho + \pi\Delta \right) + (2\pi\rho^2 + 2\pi\rho\Delta) M^0 \Big] \Big\} = M^0 + 2\pi\Delta. \tag{7.1.48}$$

类似地还有

$$\int_{B \cap K_0 \neq \varnothing} V_{01} dB = 2\pi V_0 \Delta, \tag{7.1.49}$$

$$\int_{B \cap K_0 \neq \varnothing} F_{01} dB = 2\pi (2V_0 + F_0 \Delta), \tag{7.1.50}$$

$$\int_{B \cap K_0 \neq \varnothing} M_{01} dB = (\pi^3/4) F_0 + 2\pi M^0 \Delta. \tag{7.1.51}$$

注 关于 E_3 中柱体的上述讨论可以推广到 E_n 中（见[1]）. 不过我们下面只用到三维的情形.

§7.2 立体学大意

7.2.1 立体学的研究对象

设 E_3 中随机地分布着一些凸的颗粒(即凸体). 由于材料的不透明性等等原因，要直接了解这些颗粒分布的一些数量信息有时很困难. 常用的办法之一是先考察空间的随机截割，比如用平面去截割，获得这些颗粒的截口在平面上分布的有关信息，然后利用这些二维的信息估计出颗粒在三维空间中分布的状况. 除用平面去截割而外，也可以用直线、带形或柱体去截割等等. 这类利用某种截割上的数量信息估算三维对象的数量信息的方法，便是立体学或立体度测法的研究对象. 立体学是一门交缘学科，它与许多学科有密切联系. 许多应用科学向立体学提出课题或提供问题的背景，而随机数学和积分几何则为它提供了坚实的理论基础.

7.2.2 一般性的讨论

假定 E_3 中随机分布着一些全等于凸体 K 的凸颗粒. K 的体积为 V, 表面积为 F, ∂K 的平均曲率积分为 M. 设 K_1 为动凸体(或称探测器), 其体积、表面积和边界的平均曲率积分依次为 V_1、F_1 和 M_1. 对于 K_1 的任一位置, 与 K_1 相遇的颗粒的总数 $\tilde{N}$、总体积 $\tilde{V}$、总表面积 $\tilde{F}$ 以及总平均曲率积分 $\tilde{M}$ 一般依赖于 K_1 的位置, 即它们都是随机变量. $\tilde{N}$、$\tilde{V}$、$\tilde{F}$ 及 $\tilde{M}$ 的数学期望分别记为 N^*、V^*、F^* 及 M^*. 我们的问题是: 用 V_1, F_1, M_1, N^*, V^*, F^* 和 M^* 来估计 V, F, M 以及 ρ(E_3 中平均每单位体积中颗粒数).

取半径等于 R 的球体作为 K_0, 由(7.1.36)和(7.1.38)二式, 有

$$\int_{K_1\cap K_0\neq\emptyset} dK_1=8\pi^2\left(\frac{4}{3}\pi R^3+V_1\right)+2\pi\left(4\pi R^2M_1+F_1\frac{4\pi}{3}R^2\right),$$

$$\int_{K_1\cap K_0\neq\emptyset}\tilde{V}\,dK_1=\int_{K_1\cap K_0\neq\emptyset}\rho V V_{01}dK_1=\rho V\cdot 8\pi^2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3V_1.$$

于是

$$V^*=\lim_{R\to\infty}\left(\int_{K_1\cap K_0\neq\emptyset}\tilde{V}\,dK_1\Big/\int_{K_1\cap K_0\neq\emptyset}dK_1\right)=\rho VV_1. \tag{7.2.1}$$

利用(7.1.39)式, 有

$$\int_{K_1\cap K_0\neq\emptyset}\tilde{F}\,dK_1=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\int_{K_1\cap K_0\neq\emptyset}F_{01}\,dK_1$$
$$=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\cdot 8\pi^2(F_1V+V_1F).$$

从而有

$$F^*=\lim_{R\to\infty}\left(\int_{K_1\cap K_0\neq\emptyset}\tilde{F}\,dK_1\Big/\int_{K_1\cap K_0\neq\emptyset}dK_1\right)$$
$$=\rho(F_1V+V_1F). \tag{7.2.2}$$

由(7.2.1)、(7.2.2)二式, 有

$$V=\frac{V^*}{\rho V_1},\quad F=\frac{F^*V_1-V^*F_1}{\rho V_1^2}. \tag{7.2.3}$$

利用(7.1.40)式，有

$$\int_{K_1\cap K_0\neq\emptyset}\widetilde{M}\,dK_1=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\int_{K_1\cap K\neq\emptyset}M_{01}\,dK_1$$

$$=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3[8\pi^2(V_1M+M_1V)+(\pi^4/2)FF_1].$$

由此可得到

$$M^*=\rho\left(V_1M+M_1V+\frac{\pi^2}{16}FF_1\right).\qquad(7.2.4)$$

由(7.2.3)、(7.2.4)二式，有

$$M=\frac{1}{\rho V_1^2}\left[V_1^2M^*-\frac{\pi^2}{16}F_1V_1F^*+\left(\frac{\pi^2}{16}F_1^2-M_1V_1\right)V^*\right].$$

(7.2.5)

利用(7.1.37)式，有

$$\int\widetilde{N}dK_1=2\pi\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\rho[4\pi(V+V_1)+FM_1+F_1M].$$

由此可求出

$$N^*=\frac{1}{4\pi}[4\pi(V+V_1)+FM_1+F_1M]\rho.\qquad(7.2.6)$$

将(7.2.3)、(7.2.5)二式代入上式，得到

$$\rho=\frac{N^*}{V_1}-\frac{F_1M^*}{4\pi V_1^2}+\left(\frac{\pi}{32}F_1^2-\frac{V_1M_1}{2\pi}\right)\frac{F^*}{2V_1^2}$$

$$+\left(\frac{V_1F_1M_1}{2\pi}-V_1^2-\frac{\pi}{64}F_1^3\right)\frac{V^*}{V_1^3}.\qquad(7.2.7)$$

上述公式(7.2.3)、(7.2.5)和(7.2.7)解决了我们所提出的问题，即可以通过 N^*、V^*、F^*、M^*、V_1、F_1、M_1 来估计 ρ、V、F、M.

若取柱体作为动图形，与上面的讨论类似，由(7.1.44)、(7.1.45)、(7.1.46)、(7.1.47)、(7.1.37)等式，可导出下列诸式：

$$\begin{aligned}&V^*=\rho V,\\&F^*=\rho F+\rho V(L/f),\\&M^*=\rho M+\rho\pi(V/f)+\rho\pi^2FL/(16f),\\&N^*=\rho(F/(4f)+ML/(4\pi f)+1),\end{aligned}\qquad(7.2.8)$$

其中 L 和 f 表示柱体的正截面的周长和面积，N^*、V^*、F^* 及 M^* 之意义与上述情况类似，不一一赘述. 由(7.2.8)式立即得到

$$
\begin{aligned}
V&=\frac{V^*}{\rho},\\
F&=\frac{F^*f-V^*L}{\rho f},\\
M&=\frac{M^*}{\rho}-\frac{\pi V^*}{\rho f}-\frac{\pi^2 L}{16\rho f^2}(F^*f-V^*L),\\
\rho&=N^*-\frac{LM^*}{4\pi f}+\left(\frac{\pi L^2}{16f}-1\right)\frac{F^*}{4f}+\left(1-\frac{\pi L^2}{32f}\right)\frac{LV^*}{2f^2}.
\end{aligned}
\tag{7.2.9}
$$

若动图形为宽度等于 Δ 的带形 B，则有

$$
\begin{aligned}
&V^*=\rho V\Delta,\ F^*=\rho(F\Delta+2V),\\
&M^*=\rho\left(M\Delta+\frac{\pi^2}{8}F\right),\quad N^*=\rho\left(\Delta+\frac{M}{2\pi}\right).
\end{aligned}
\tag{7.2.10}
$$

由此得到

$$
\begin{aligned}
V&=\frac{V^*}{\rho\Delta},\ F=\frac{F^*\Delta-2V^*}{\rho\Delta^2},\\
M&=\frac{8M^*\Delta^2-\pi^2F^*\Delta+2\pi^2V^*}{8\rho\Delta^3},\\
\rho&=\frac{N^*}{\Delta}-\frac{8M^*\Delta^2-\pi^2F^*\Delta+2\pi^2V^*}{16\pi\Delta^4}.
\end{aligned}
\tag{7.2.11}
$$

7.2.3 切片法——用平面截割

设凸体 Q 中含有一些随机分布的凸颗粒．假定这些颗粒皆相似于凸体 K．相似于 K 且相似比为 λ 的颗粒记作 K_λ．$\lambda=1$ 对应于 K 自身，即 $K_1=K$．又，设 Q 中平均每单位体积里含有的相似比在 λ 与 $\lambda+d\lambda$ 之间的颗粒数为 $H(\lambda)d\lambda$.

以随机平面 E 截割 Q，将截到若干颗粒，截口是 $E\cap Q$ 上的一些凸域．$E\cap Q$ 的单位面积里含有的面积介于 σ 与 $\sigma+d\sigma$ 之间的截口数目是一随机变量，其数学期望设为 $h(\sigma)d\sigma$.

截口 $E\cap K$ 的面积 σ 也是一随机变量，此随机变量的分布密度记为 $\phi(\sigma)$．从而截口 $E\cap K$ 的面积介于 σ 与 $\sigma+d\sigma$ 之间的概率为 $\phi(\sigma)d\sigma$．若 $E\cap K$ 的面积的最大值记为 σ_m，则有

$$
\int_0^{\sigma_m}\phi(\sigma)d\sigma=1, \tag{7.2.12}
$$

而σ的数学期望为

$$\int_0^{\sigma_m}\sigma\phi(\sigma)d\sigma=\int_{E\cap K\neq\emptyset}\sigma(E\cap K)\,dE\Big/\int_{E\cap K\neq\emptyset}dE$$

$$=2\pi V/M, \tag{7.2.13}$$

其中V是K的体积,M是∂K的平均曲率积分. 注意,此处用到了(7.1.30)和(7.1.33)二式.

现在转而考虑K_λ. 设$E\cap K_\lambda$的面积σ的分布密度为$\phi(\sigma,\lambda)$. 因为当$\lambda=1$时,$K_1=K$,所以$\phi(\sigma,1)=\phi(\sigma)$. 由于$\lambda$是相似比,故有

$$\phi(\sigma,\lambda)d\sigma=\phi\left(\frac{\sigma}{\lambda^2}\right)d\left(\frac{\sigma}{\lambda^2}\right).$$

于是

$$\phi(\sigma,\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}\phi\left(\frac{\sigma}{\lambda^2}\right). \tag{7.2.14}$$

例 设K为单位球,球心到平面E的距离x服从均匀分布. $E\cap K$的半径记为r,面积以σ表示. 由关系

$$x^2=1-r^2=1-\frac{\sigma}{\pi}$$

可知,截口$E\cap K$的面积在σ与$\sigma+d\sigma$之间的概率为

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}(\pi-\sigma)^{1/2}}d\sigma.$$

于是有

$$\phi(\sigma)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}(\pi-\sigma)^{1/2}}. \tag{7.2.15}$$

由(7.2.14)式,对K_λ有

$$\phi(\sigma,\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\lambda^2\left(\pi-\frac{\sigma}{\lambda^2}\right)^{1/2}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\lambda(\pi\lambda^2-\sigma)^{1/2}}, \tag{7.2.16}$$

或

$$\phi(\sigma,\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\lambda(\sigma_m-\sigma)^{1/2}}. \tag{7.2.17}$$

设∂Q和∂K_λ的平均曲率积分分别为M_Q和M_λ,则与Q相遇的平面E能与K_λ相遇的概率为

$$\int_{E\cap K_\lambda\neq\emptyset} dE \Big/ \int_{E\cap Q\neq\emptyset} dE = M_\lambda/M_Q.$$

由于 $H(\lambda)d\lambda$ 表示 Q 中单位体积里所含的相似比在 λ 与 $\lambda+d\lambda$ 之间的颗粒数，故若 Q 之体积为 V_Q，则 Q 中含有的相似比介于 λ 与 $\lambda+d\lambda$ 之间的颗粒总数等于 $VH(\lambda)d\lambda$. 因此

$$\eta=(M_\lambda/M_Q)V_QH(\lambda)d\lambda$$

是与 Q 相遇的平面 E 所能遇到的相似比在 λ 与 $\lambda+d\lambda$ 之间的颗粒数之平均值. 又，因为 $E\cap K_\lambda$ 的面积介于 σ 与 $\sigma+d\sigma$ 之间的概率为 $\phi(\sigma,\lambda)d\sigma$，故

$$(M_\lambda/M_Q)V_QH(\lambda)\phi(\sigma,\lambda)d\lambda\, d\sigma \tag{7.2.18}$$

表示满足下述条件的截口的平均个数：λ 介于 λ 与 $\lambda+d\lambda$ 之间，$E\cap K_\lambda$ 的面积介于 σ 与 $\sigma+d\sigma$ 之间. 取表达式 (7.2.18) 从 $\lambda=(\sigma/\sigma_m)^{1/2}$ 到 $\lambda=\infty$ 的积分，得到

$$d\sigma\int_{(\sigma/\sigma_m)^{1/2}}^{\infty}(M_\lambda/M_Q)V_QH(\lambda)\phi(\sigma,\lambda)d\lambda, \tag{7.2.19}$$

它等于面积在 σ 与 $\sigma+d\sigma$ 之间的截口 $E\cap K_\lambda$ 的个数的平均值. 下限取作 $(\sigma/\sigma_m)^{1/2}$ 的理由是：K_λ 被 E 截出的最大面积是 $\lambda^2\sigma_m$，若 $\lambda<(\sigma/\sigma_m)^{1/2}$ 则 $\lambda^2\sigma_m<\sigma$.

另一方面，$h(\sigma)d\sigma$ 表示 $E\cap Q$ 中单位面积里含有的面积在 σ 与 $\sigma+d\sigma$ 之间的截口个数，而 $E\cap Q$ 的面积的平均值为 $2\pi V_Q/M_Q$（见(7.2.13)式）. 因此

$$\int_{(\sigma/\sigma_m)^{1/2}}^{\infty}(M_\lambda/M_Q)V_QH(\lambda)\phi(\sigma,\lambda)d\lambda=(2\pi V_Q/M_Q)h(\sigma).$$

由 $M_\lambda=\lambda M$（M 表示 ∂K 的平均曲率积分），以及(7.2.14)式，上式可写作

$$\int_{(\sigma/\sigma_m)^{1/2}}^{\infty}\lambda^{-1}H(\lambda)\phi(\sigma/\lambda^2)d\lambda=(2\pi/M)h(\sigma). \tag{7.2.20}$$

通常通过对截面 $E\cap Q$ 的观测计算可近似地表达出函数 $h(\sigma)$. 在此基础上，可由方程(7.2.20)解出 $H(\lambda)$. (7.2.20)式是一个积分方程，其中 ϕ 依赖于颗粒 K 的形状.

7.2.4 球形颗粒

现在我们来运用上一段的结论讨论球形颗粒.

取单位球作为 K. 这时 $M=4\pi$, $\sigma_m=\pi$, 参数 λ(相似比)即球 K_λ 的半径. 利用(7.2.15)式,(7.2.20)式具体化为

$$\int_{(\sigma/\pi)^{1/2}}^{\infty}\frac{H(\lambda)d\lambda}{\sqrt{\pi}(\lambda^2\pi-\sigma)^{1/2}}=\sqrt{\pi}h(\sigma). \qquad (7.2.21)$$

置 $\pi\lambda^2=s$, $H_1(s)=s^{\frac{1}{2}}H((s/\pi)^{\frac{1}{2}})$ 以及 $h_1(\sigma)=2\pi h(\sigma)$,则上式变成

$$\int_{\sigma}^{\infty}\frac{H_1(s)ds}{(s-\sigma)^{1/2}}=h_1(\sigma). \qquad (7.2.22)$$

(7.2.22)式是所谓 Abel 型积分方程,其解为

$$H_1(s)=-\frac{1}{\pi}\int_{s}^{\infty}\frac{h_1'(\sigma)d\sigma}{(\sigma-s)^{1/2}}. \qquad (7.2.23)$$

仍以 $H(\lambda)$ 和 $h(\sigma)$ 来表达,则为

$$H(\lambda)=-2\pi^{1/2}\lambda\int_{\pi\lambda^2}^{\infty}\frac{h'(\sigma)}{(\sigma-\pi\lambda^2)^{1/2}}\,d\sigma. \qquad (7.2.24)$$

如前所述, $h(\sigma)d\sigma$ 表示 $E\cap Q$ 中单位面积里所含的面积在 σ 与 $\sigma+d\sigma$ 之间的截口数目. 在球形颗粒情形, 截口为圆盘. 若不用圆盘的面积 σ 而改用圆盘的半径 r 作为变量, 从实践的观点看也许更直接一些. 由 $\sigma=\pi r^2$, 有

$$h(\sigma)d\sigma=h(\pi r^2)\cdot 2\pi r\,dr=g(r)dr,$$

其中
$$g(r)=2\pi r h(\pi r^2),$$

即

$$h(\sigma)=\frac{g(r)}{2\pi r}. \qquad (7.2.25)$$

此时 $g(r)dr$ 之几何意义是:在 $E\cap Q$ 中单位面积里所含的半径在 r 与 $r+dr$ 之间的圆盘个数. 将(7.2.25)式代入(2.2.24)式, 得到

$$H(\lambda)=-\frac{\lambda}{\pi}\int_{\lambda}^{\infty}\left(\frac{g(r)}{r}\right)'\frac{dr}{(r^2-\lambda^2)^{1/2}}. \qquad (7.2.26)$$

此公式由 Wicksell 首先导出(见[2]).

7.2.5 近球颗粒

从实际应用的角度看，讨论非球形的凸颗粒是必要的. 前面已经说过，对于单位球体而言，截口面积的分布密度 $\phi(\sigma)$ 为

$$\phi(\sigma)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}(\sigma_m-\sigma)^{-\frac{1}{2}}, & \text{当 } 0\leqslant\sigma\leqslant\sigma_m,\\ 0, & \text{当 } \sigma>\sigma_m.\end{cases}\tag{7.2.27}$$

由此诱发出如下的概念. 设 K 为凸体，假定 K 的平面截口面积的分布之概率密度函数 $\phi(\sigma)$ 具有如下的形状：

$$\phi(\sigma)=\begin{cases}a(\sigma_m-\sigma)^{-\mu}, & \text{当 } 0\leqslant\sigma\leqslant\sigma_m,\\ 0, & \text{当 } \sigma>\sigma_m,\end{cases}\tag{7.2.28}$$

其中 a 和 μ 为正常数. 我们称这样的凸体为近球体或类球体.

让我们先对参数 μ 可能的取值范围作一些讨论. 根据 (7.2.12) 和 (7.2.13) 二式，有

$$\int_0^{\sigma_m}a(\sigma_m-\sigma)^{-\mu}d\sigma=\frac{a}{1-\mu}\sigma_m^{1-\mu}=1,$$

$$\int_0^{\sigma_m}a\sigma(\sigma_m-\sigma)^{-\mu}d\sigma=\frac{a}{(1-\mu)(2-\mu)}\sigma_m^{2-\mu}=\frac{2\pi V}{M}.$$

置 $1-\mu=p$，由上二式可得

$$a=p\sigma_m^{-p},\ p=(M\sigma_m/2\pi V)-1.\tag{7.2.29}$$

由 (7.1.27) 式可以推知

$$\sigma_m\geqslant F/4.\tag{7.2.30}$$

又，由 Minkowski 不等式(见[3])

$$M^2\geqslant 4\pi F\tag{7.2.31}$$

以及三维经典等周不等式 $F^3\geqslant 36\pi V^2$ 不难推出

$$MF\geqslant 12\pi V.\tag{7.2.32}$$

由 (7.2.30)、(7.2.32) 二式立即可得

$$p=(M\sigma_m/2\pi V)-1\geqslant\frac{1}{2}.\tag{7.2.33}$$

因 $\mu=1-p$，故有 $\mu\leqslant\dfrac{1}{2}$.

当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，由(7.2.29)式知 $\sigma_m=3\pi V/M$. 再由 Minkowski 不等式(7.2.31)及等周不等式，有

$$\sigma_m=\frac{3\pi V}{M}\leqslant\frac{3\pi V}{2\sqrt{\pi F}}\leqslant\frac{3\pi\cdot\frac{4\pi}{3}\left(\frac{F}{4\pi}\right)^{3/2}}{2\sqrt{\pi F}}=\frac{F}{4}. \quad (7.2.34)$$

由(7.2.30)和(7.2.34)二式，有

$$\sigma_m=\frac{F}{4}, \quad (7.2.35)$$

从而此时 K 必为球体. 由(7.2.29)式，这时 $a=F^{-\frac{1}{2}}$.

对于近球颗粒，积分方程(7.2.20)具体化为

$$aM\int_{(\sigma/\sigma_m)^{1/2}}^{\infty}\frac{\lambda^{2\mu-1}H(\lambda)}{(\lambda^2\sigma_m-\sigma)^{\mu}}d\lambda=2\pi h(\sigma). \quad (7.2.36)$$

(7.2.36)式称为广义 Abel 型方程，其解为

$$H(\lambda)=-\frac{4\sigma_m\lambda^{2(1-\mu)}\sin\mu\pi}{aM}\int_{\sigma_m\lambda^2}^{\infty}\frac{h'(\sigma)}{(\sigma-\sigma_m\lambda^2)^{1-\mu}}d\sigma. \quad (7.2.37)$$

7.2.6 穿刺法——用直线探测

与 7.2.3 段相同，假定 Q 中有若干相似于凸体 K 的颗粒，相似比等于 λ 的记为 K_λ. 用随机直线 G 与 Q 相交，与 G 相遇的颗粒被 G 截出一些弦(截痕)，它们是 $G\cap Q$ 上的一些区间. 在 $G\cap Q$ 上单位长度里所含的长度介于 l 与 $l+dl$ 之间的这种区间的个数记为 $h(l)dl$. 又，$H(\lambda)$ 之意义同前. 问题仍在于从 $h(l)$ 求 $H(\lambda)$.

弦 $G\cap Q$ 的长度的平均值为

$$\int_{G\cap Q\neq\emptyset}\sigma_1(G\cap Q)dG\Big/\int_{G\cap P\neq\emptyset}dG=2\pi V_Q\Big/\left(\frac{\pi}{2}F_Q\right)=\frac{4V_Q}{F_Q}.$$

因此，$G\cap Q$ 上长度介于 l 与 $l+dl$ 之间的截痕数的数学期望为

$$(4V_Q/F_Q)h(l)dl. \quad (7.2.38)$$

另一方面，对于与 Q 相交的直线 G，与 G 相遇的相似比在 λ 与 $\lambda+$

$d\lambda$ 之间的颗粒数的平均值为

$$(F_\lambda/F_Q)V_QH(\lambda)d\lambda,$$

其中 F_Q 和 F_λ 分别表示 Q 和 K_λ 的表面积.

又，随机直线 G 与凸体 K 相交，弦长为随机变数．设此随机变数的概率密度为 $\phi(l)$．由此推知，对于 K_λ，弦 $G\cap K_\lambda$ 的长度介于 l 与 $l+dl$ 之间的概率为

$$\phi(l,\ \lambda)dl=\lambda^{-1}\phi(l/\lambda)dl.$$

从而在 $G\cap Q$ 上长度在 l 与 $l+dl$ 之间的弦 $G\cap K_\lambda$ 的数目平均为

$$dl\int_{l/l_m}(F_\lambda/F_Q)V_QH(\lambda)\phi(l,\ \lambda)d\lambda, \tag{7.2.39}$$

其中 l_m 表示 G 在 K 上截出的最大弦长．由(7.2.38)和(7.2.39)两个表达式，得到

$$\int_{l/l_m}^{\infty}(F_\lambda/F_Q)V_QH(\lambda)\phi(l,\ \lambda)d\lambda=(4V_Q/F_Q)h(l).$$

设 K 的表面积为 F，则 K_λ 的表面积为 λ^2F．又，$\phi(l,\ \lambda)=\frac{1}{\lambda}\phi(l/\lambda)$．故有

$$\int_{l/l_m}^{\infty}\lambda\phi(l/\lambda)H(\lambda)d\lambda=(4/F)h(l). \tag{7.2.40}$$

公式中的函数 ϕ 与 K 的形状有关．且看一重要特款．设 K 是 E_3 中单位球体，球心到直线 G 的距离 x 服从均匀分布．由 $x^2=1-\frac{1}{4}l^2$ 推知

$$\phi(l)dl=dx=\frac{l}{2}dl.$$

又，$l_m=2$，$F=4\pi$．从而(7.2.40)式具体化为

$$\int_{l/2}^{\infty}H(\lambda)d\lambda=\frac{2}{\pi l}h(l). \tag{7.2.41}$$

此式的解显然为

$$H(\lambda)=-\frac{1}{\pi}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{h(2\lambda)}{\lambda}\right). \tag{7.2.42}$$

7.2.7 晶粒估计问题

现在我们假定凸颗粒填满空间,类似于结晶体那样的状况,希望通过平面截割或直线截割了解颗粒在三维空间中分布的状况,这就是所谓晶粒估计问题.

如果假设颗粒皆为凸多面体——它们是 Poisson 随机平面场将空间分割的结果. 在这种假定之下, R. E. Miles 得出下列关系:

$$\eta=(9\pi/16)^{\frac{1}{3}}\lambda^{\frac{2}{3}}=1.209\lambda^{\frac{2}{3}}, \tag{7.2.43}$$

其中 λ 表示单位体积中颗粒数, η 表示截面上单位面积中的截口数.

有些作者指出,在多数实际问题中上述假设不成立,因而提出另外的修正模型. 例如 Meijering 提出的公式是

$$\eta=\frac{1}{20}(4\pi)^{5/3}3^{-2/3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\lambda^{2/3}=1.458\lambda^{2/3}. \tag{7.2.44}$$

η 与 λ 的关系,与颗粒的形状和在空间配置的状况有关,似乎很难找到一个统一的公式.

§7.3 一个凸体包含另一个凸体的充分条件

7.3.1 一个密度公式

关于欧氏平面上一个区域包含另一个区域的问题,我们介绍过 Hadwiger 充分条件(条件(4.2.13)和(4.2.14))及其等价形式(条件(4.2.2)和(4.2.3)). 推导上述条件时,需要对一域含于另一域内的运动测度作出估计,而这就要用到 Blaschke 运动基本公式和 Poincaré 公式. 由于在三维空间中 Poincaré 公式没有平行的结果,因此讨论 E_3 中一凸体包含另一凸体的问题时就产生困难. 通过估计二卵形面的交线的全曲率的积分,可以绕过这一困难. 在此过程中,要用到一个密度公式,它是公式(6.9.13)的特款.

设 S_0, S_1 为 E_n 中二 C^2 类超曲面, dT_i 表示曲面 S_i 上的运动密度($i=0, 1$), dT_{01} 表示 $S_1\cap S_0$ 上的运动密度. 公式(6.9.13)建立了 E_n 中特殊运动群的运动密度 dK_1 与 dT_0、dT_1 及 dT_{01} 之间的关系, 即

$$dT_{01}\wedge dK_1=\sin^{n-1}\varphi\, d\varphi\wedge dT_1\wedge dT_0, \tag{7.3.1}$$

其中 φ 表示二曲面 S_1 与 S_0 在活动标架原点 $x\in S_1\cap S_0$ 处的夹角. 现在设 ∂K_0, ∂K_1 是 E_3 中二 C^2 类曲面, 它们的交线记为 C, 即 $C=\partial K_1\cap\partial K_0$. 这时 $dT_{01}=ds$, 即等于曲线 C 在 x 处的弧元. 又, 曲面 ∂K_i 上的运动密度 dT_i 应为

$$dT_i=da_i\wedge d\varphi_i,$$

其中 da_i 为曲面 ∂K_i 在 x 处的面积元, 而 φ_i 是 C 在 x 处的切向量与 ∂K_i 在 x 处的切平面上任意指定的参考方向间的角, 特别说来, 自然可取 ∂K_i 在 x 处的主方向作为这样的参考方向. 因此, (6.9.13)式具体化为

$$ds\wedge dK_1=\sin^2\varphi\, d\varphi\wedge da_0\wedge da_1\wedge d\varphi_0\wedge d\varphi_1. \tag{7.3.2}$$

7.3.2 一个凸体包含另一个凸体的充分条件

定理(张高勇[4]) 设 $K_i(i=0, 1)$ 是 E_3 中有界闭凸体, 其边界 ∂K_i 为 C^2 类曲面. V_i 和 F_i 依次为 K_i 的体积和表面积, ∂K_i 的平均曲率积分和平均曲率的平方积分分别记为 M_i 和 N_i. 则条件

$$\begin{aligned}&8\pi^2(V_0+V_1)-\frac{2}{3}\pi(F_0M_1+F_1M_0)\\&\quad-\frac{2}{3}\{2F_0F_1[3(N_0F_1+N_1F_0)-4\pi(F_0+F_1)-4M_0M_1]\}^{\frac{1}{2}}\\&>0\end{aligned} \tag{7.3.3}$$

是致 $K_0\subset K_1$ 或 $K_1\subset K_0$ 的一个充分条件.

证明 设 $\varkappa$ 是曲线 $C=\partial K_1\cap\partial K_0$ 的曲率. 让我们来估计下列积分:

$$I=\int_{\partial K_1\cap\partial K_0\neq\emptyset}\left(\int_C\varkappa\, ds\right)dK_1. \tag{7.3.4}$$

为此需要利用关系(见[5])

$$\varkappa^2\sin^2\varphi=(\varkappa_n^{(0)})^2+(\varkappa_n^{(1)})^2-2\varkappa_n^{(0)}\varkappa_n^{(1)}\cos\varphi, \tag{7.3.5}$$

其中 $\varkappa_n^{(i)}$ 为 ∂K_i 的法曲率,由(7.3.5)式有

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \varkappa\sin^2\varphi\,d\varphi&=\int_0^\pi[(\varkappa_n^{(0)})^2+(\varkappa_n^{(1)})^2-2\varkappa_n^{(0)}\varkappa_n^{(1)}\cos\varphi]^{\frac{1}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\\&=(3\varkappa_n^{(0)}\varkappa_n^{(1)})^{-1}(|\varkappa_n^{(0)}+\varkappa_n^{(1)}|^3-|\varkappa_n^{(0)}-\varkappa_n^{(1)}|^3).\end{aligned} \tag{7.3.6}$$

若 $\varkappa_n^{(0)}\geqslant\varkappa_n^{(1)}$,则有

$$\begin{aligned}&(3\varkappa_n^{(0)}\varkappa_n^{(1)})^{-1}(|\varkappa_n^{(0)}+\varkappa_n^{(1)}|^3-|\varkappa_n^{(0)}-\varkappa_n^{(1)}|^3)\\&\quad=(3\varkappa_n^{(0)})^{-1}[6(\varkappa_n^{(0)})^2+2(\varkappa_n^{(1)})^2]\\&\quad\leqslant2\,(\varkappa_n^{(0)}+\varkappa_n^{(1)})-\frac{4}{3}\varkappa_n^{(1)};\end{aligned} \tag{7.3.7}$$

若 $\varkappa_n^{(1)}\geqslant\varkappa_n^{(0)}$,则有

$$\begin{aligned}&(3\varkappa_n^{(0)}\varkappa_n^{(1)})^{-1}(|\varkappa_n^{(0)}+\varkappa_n^{(1)}|^3-|\varkappa_n^{(0)}-\varkappa_n^{(1)}|^3)\\&\quad\leqslant2\,(\varkappa_n^{(0)}+\varkappa_n^{(1)})-\frac{4}{3}\varkappa_n^{(0)}.\end{aligned} \tag{7.3.8}$$

无论是哪一种情况,等式成立的充要条件皆是 $\varkappa_n^{(0)}=\varkappa_n^{(1)}$. 由(7.3.6)、(7.3.7)和(7.3.8)三式推知

$$\int_0^\pi\varkappa\sin^2\varphi\,d\varphi\leqslant2(\varkappa_n^{(0)}+\varkappa_n^{(1)})-\frac{4}{3}\min\{\varkappa_n^{(0)},\ \varkappa_n^{(1)}\}. \tag{7.3.9}$$

利用显然的恒等式

$$\min\{\varkappa_n^{(0)},\ \varkappa_n^{(1)}\}=\frac{1}{2}(|\varkappa_n^{(0)}+\varkappa_n^{(1)}|-|\varkappa_n^{(0)}-\varkappa_n^{(1)}|),$$

则有

$$\int_0^\pi\varkappa\sin^2\varphi\,d\varphi\leqslant\frac{4}{3}\,(\varkappa_n^{(0)}+\varkappa_n^{(1)})+\frac{2}{3}|\varkappa_n^{(0)}-\varkappa_n^{(1)}|, \tag{7.3.10}$$

其中等式成立的充要条件仍是 $\varkappa_n^{(0)}=\varkappa_n^{(1)}$.

利用(7.3.2)和(7.3.10)二式,可以得到积分(7.3.4)的下述估计

$$I\leqslant\iint\left[\frac{4}{3}\,(\varkappa_n^{(0)}+\varkappa_n^{(1)})+\frac{2}{3}\,|\varkappa_n^{(0)}-\varkappa_n^{(1)}|\right]da_0\wedge da_1\wedge d\varphi_0\wedge d\varphi_1. \tag{7.3.11}$$

进一步的问题是对(7.3.11)式右方作出估计．这时要用到熟知的Euler 公式

$$\varkappa_n^{(i)}=\varkappa_1^{(i)}\cos^2\varphi_i+\varkappa_2^{(i)}\sin^2\varphi_i, \tag{7.3.12}$$

其中 $\varkappa_1^{(i)}$, $\varkappa_2^{(i)}$ 是 ∂K_i 的主曲率．利用(7.3.12)式和恒等式

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\tau\,d\tau=\int_0^{2\pi}\sin^2\tau\,d\tau=\pi,$$

我们有

$$\int\frac{4}{3}(\varkappa_n^{(0)}+\varkappa_n^{(1)})\,da_0\wedge da_1\wedge d\varphi_0\wedge d\varphi_1$$
$$=\frac{16\pi^2}{3}(M_0F_1+M_1F_0). \tag{7.3.13}$$

又，由 Schwarz 不等式，有

$$\int|\varkappa_n^{(0)}-\varkappa_n^{(1)}|\,da_0\wedge da_1\wedge d\varphi_0\wedge d\varphi_1$$
$$\leqslant(4\pi^2F_0F_1)^{\frac{1}{2}}\left[\int(\varkappa_n^{(0)}-\varkappa_n^{(1)})^2\,da_0\wedge da_1\wedge d\varphi_0\wedge d\varphi_1\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7.3.14}$$

利用(7.3.12)式，有

$$\int\varkappa_n^{(i)}\,da_i\wedge d\varphi_i=\pi\int(\varkappa_1^{(i)}+\varkappa_2^{(i)})\,da_i=2\pi M_i, \tag{7.3.15}$$

$$\int(\varkappa_n^{(i)})^2\,da_i\wedge d\varphi_i=3\pi\int\left(\frac{\varkappa_1^{(i)}+\varkappa_2^{(i)}}{2}\right)^2da_i-\pi\int\varkappa_1^{(i)}\varkappa_2^{(i)}\,da_i$$
$$=3\pi N_i-4\pi^2. \tag{7.3.16}$$

由刚才的二式可得

$$\int(\varkappa_n^{(0)}-\varkappa_n^{(1)})^2\,da_0\wedge da_1\wedge d\varphi_0\wedge d\varphi_1$$
$$=6\pi^2(N_0F_1+N_1F_0)-8\pi^3(F_0+F_1)-8\pi^2M_0M_1. \tag{7.3.17}$$

由(7.3.14)、(7.3.17)二式，我们有

$$\int|\varkappa_n^{(0)}-\varkappa_n^{(1)}|\,da_0\wedge da_1\wedge d\varphi_0\wedge d\varphi_1$$
$$\leqslant2\pi^2\{F_0F_1[6(N_0F_1+N_1F_0)-8\pi(F_0+F_1)-8M_0M_1]\}^{\frac{1}{2}}. \tag{7.3.18}$$

由(7.3.11)、(7.3.13)及(7.3.18)三式，得到下面的估计式：

$$I\leqslant\frac{16}{3}\pi^2(F_0M_1+F_1M_0)$$
$$+\frac{4}{3}\pi^2\{2F_0F_1[3(N_0F_1+N_1F_0)-4\pi(F_0+F_1)-4M_0M_1]\}^{\frac{1}{2}}. \tag{7.3.19}$$

不等式(7.3.19)中等号成立的充要条件是：∂K_1 与 ∂K_0 在任何点沿任何方向的法曲率彼此相等，亦即 ∂K_1 与 ∂K_0 是合同的球面。

另一方面，由 Fenchel 定理，

$$\int_C \varkappa\, ds\geqslant 2\pi.$$

从而有

$$I\geqslant 2\pi\int_{\partial K_1\cap\partial K_0\neq\emptyset} dK_1. \tag{7.3.20}$$

根据此式及 Blaschke 公式(7.1.36)，可以得到下述不等式：

$$m_0=m\{K_1\subset K_0 \text{ 或 } K_0\subset K_1\}=\int_{K_1\cap K_0\neq\emptyset} dK_1-\int_{\partial K_1\cap\partial K_0\neq\emptyset} dK_1$$
$$\geqslant 8\pi^2(V_0+V_1)+2\pi(F_0M_1+F_1M_0)-\frac{1}{2\pi}I$$
$$\geqslant 8\pi^2(V_0+V_1)-\frac{2}{3}\pi(F_0M_1+F_1M_0)$$
$$-\frac{2}{3}\{2F_0F_1[3(N_0F_1+N_1F_0)-4\pi(F_0+F_1)-4M_0M_1]\}^{\frac{1}{2}}, \tag{7.3.21}$$

此处等式成立的充要条件仍然是 ∂K_0 与 ∂K_1 为合同的球面. 有了不等式(7.3.21)，显然我们已完成了定理的证明.

§7.4 凸体内定长线段的运动测度

在第四章的第三、四两节中，曾经比较详细地讨论过凸域内定长线段运动测度及其应用. 现在我们来讨论 E_n 中相应的问题(本节内容见任德麟[6]、任德麟与张高勇[7])。

7.4.1 E_n 中凸体内定长线段运动测度的一般公式

设 D 为 E_n 中有界闭凸体. D 之体积和表面积(D 的边界 ∂D 的 $(n-1)$ 维体积)分别记为 V 和 F. N 为 E_n 中长度为 l 的随机线段, 取定正向的 N 记为 N^*. 含于凸体 D 内的 N 的运动测度记为 $m(l)$; 对 N^*, 相应地记为 $m^*(l)$. 显然有

$$m^*(l)=2m(l). \tag{7.4.1}$$

引理 1 设$(p_0;\ e_1^0,\ \cdots,\ e_n^0)$为正交标准化固定标架. L_1 为 E_n 中随机直线. $(p;\ e_1,\ \cdots,\ e_n)$为活动标架, 其中 e_1 保持位于 L_1 上. 过 p_0 引垂直于 L_1 的 $(n-1)$ 维平面与 L_1 交于 H, p 到 H 的距离记为 s. 则 E_n 中特殊运动群的运动密度

$$dK=dL_1^*\wedge ds\wedge dK_{[1]}. \tag{7.4.1'}$$

证明 注意到 $\omega_1=dp\cdot e_1=ds$, 此结论是显然的.

引理 2 若 N^* 的起点 p_1 在 D 之外且与 ∂D 恰有二交点的运动测度记为 $m_e^{(2)}(l)$, 即

$$m_e^{(2)}(l)=m\{N^*: p_1\overline{\in} D,\ N^* \text{与 } \partial D \text{恰有 2 交点}\}.$$

又, 以 σ 表示 L_1 与 D 相截所形成的弦长. 则有

$$m_e^{(2)}(l)=2O_1\cdots O_{n-2}\int_{\substack{L_1\cap D\neq\varnothing\\(\sigma\leqslant l)}}(l-\sigma)dL_1. \tag{7.4.2}$$

证明 将 N^* 附着于未定向的直线 L_1 上, 有

$$m_e^{(2)}(l)=\int_{\substack{L_1\cap D\neq\varnothing\\(\sigma\leqslant l)}}dK=2\int_{\substack{L_1\cap D\neq\varnothing\\(\sigma\leqslant l)}}dL_1\wedge ds\wedge dK_{[1]}$$

$$=2O_1\cdots O_{n-2}\int_{\substack{L_1\cap D\neq\varnothing\\(\sigma\leqslant l)}}(l-\sigma)dL_1.$$

引理 3 与 D 相交的 N^* 的运动测度为

$$\int_{N^*\cap D\neq\varnothing}dK=O_1\cdots O_{n-2}\left[O_{n-1}V+\frac{1}{n-1}O_{n-2}lF\right]. \tag{7.4.3}$$

证明 本引理实际上是陈省身-严志达公式的一个特款. 取 D 作为 D_0, N^* 作为 D_1. 这时有

$$V_0=V,\ V_1=0,\ M_0^0=F,$$

当 $h=0, 1, \cdots, n-3$ 时

$$M_h^1=0;\quad M_{n-2}^1=\frac{O_{n-2}}{n-1}l.$$

将上述事项计入(6.9.50)式便得到(7.4.3)式.

引理 4 起点 p_1 在 D 之外而与 D 相交的运动测度记为 $m_e^*(l)$，则

$$m_e^*(l)=O_1\cdots O_{n-2}\frac{O_{n-2}}{n-1}lF. \tag{7.4.4}$$

证明 按 $m_e^*(l)$ 之定义，应有

$$m_e^*(l)=\int_{N^*\cap D\neq\emptyset}dK-\int_{\substack{N^*\cap D\neq\emptyset\\(p_1\in D)}}dK. \tag{7.4.5}$$

另一方面，由 $dK=dp_1\wedge dK_{[O]}$，有

$$\int_{\substack{N^*\cap D\neq\emptyset\\(p_1\in D)}}dK=O_1\cdots O_{n-1}V. \tag{7.4.6}$$

将此式及(7.4.3)式代入(7.4.5)式则得到(7.4.4)式.

顺便提一下，对 E_2 中周长为 L 的凸域相应的测度为

$$m_e^*(l)=2lL,$$

这是 Santaló 早期著名结果. 公式(7.4.4)是这一结果到 E_n 的推广.

定理 设 D 为 E_n 中有界闭凸体，体积和表面积依次为 V 和 F. N 为长度等于 l 的线段. 则含于 D 内的 N 的运动测度为

$$m(l)=\frac{1}{2}O_1\cdots O_{n-1}V-\frac{O_{n-2}}{4(n-1)}O_0O_1\cdots O_{n-2}lF$$
$$+\frac{1}{2}O_0O_1\cdots O_{n-2}\int_{\substack{L_1\cap D\neq\emptyset\\(\sigma<l)}}(l-\sigma)dL_1, \tag{7.4.7}$$

其中 $\sigma=m(L_1\cap D)$ 为弦长.

证明 先求 $m^*(l)$. 关于 $m_e^{(2)}(l)$ 和 $m_e^*(l)$ 之定义见引理 2 和引理 4. 今再补充定义两个测度：起点 $p_1\in D$ 且与 ∂D 相交的 N^* 的运动测度记为 $m_i^*(l)$；起点 p_1 在 D 之外而与 ∂D 相交于一点的 N^* 的运动测度记为 $m_e^{(1)}(l)$. 显然有

$$m_i^*(l)=m_e^{(1)}(l),\quad m_e^*(l)=m_e^{(1)}(l)+m_e^{(2)}(l). \tag{7.4.8}$$

从而有

$$m^*(l)=\int_{\substack{N^*\cap D\neq\emptyset\\(p_1\in D)}} dK-m_i^*(l)=\int_{\substack{N^*\cap D\neq\emptyset\\(p_1\in D)}} dK-m_e^{(1)}(l)$$

$$=\int_{\substack{N^*\cap D\neq\emptyset\\(p_1\in D)}} dK-m_e^*(l)+m_e^{(2)}(l). \tag{7.4.9}$$

将(7.4.2)、(7.4.4)和(7.4.6)三式代入上式，则有

$$m^*(l)=O_1\cdots O_{n-1}V-\frac{O_{n-2}}{n-1}O_1\cdots O_{n-2}lF$$
$$+2O_1\cdots O_{n-2}\int_{\substack{L_1\cap D\neq\emptyset\\(\sigma\leqslant l)}}(l-\sigma)dL_1.$$

由(7.4.1)式，则有

$$m(l)=\frac{1}{2}O_1\cdots O_{n-1}V-\frac{O_{n-2}}{2(n-1)}O_1\cdots O_{n-2}lF$$
$$+O_1\cdots O_{n-2}\int_{\substack{L_1\cap D\neq\emptyset\\(\sigma\leqslant l)}}(l-\sigma)dL_1,$$

亦即(7.4.7)式．改写为 (7.4.7) 式的形状是为了包容 $n=2$ 的情形．

注意，公式(7.4.7)实际上对一切 $l\geqslant 0$ 均成立，故当 $l\geqslant d$ (D 之直径)时有

$$\frac{1}{2}O_1\cdots O_{n-2}\left\{O_{n-1}V-\frac{O_{n-2}}{n-1}lF+2\int_{L_1\cap D\neq\emptyset}(l-\sigma)dL_1\right\}$$
$$=0.$$

从而有

$$\int_{L_1\cap D\neq\emptyset}dL_1=\frac{1}{2(n-1)}O_{n-2}F, \tag{7.4.10}$$

以及

$$\int_{L_1\cap D\neq\emptyset}\sigma\,dL_1=O_{n-1}V/2. \tag{7.4.11}$$

自然，(7.4.10)和(7.4.11)二式并非新结果，但它们被同时蕴含于一个内容更丰富的公式之中．

7.4.2 公式的变形

公式(7.4.7)表达出 E_n 中凸体内定长线段的运动测度．但在

多数场合用它实际计算 $m(l)$ 是不便的. 下面我们来介绍此公式的变形. 为此首先引进几个新概念.

定义 1 $(n-1)$维单位球面 U_{n-1} 上的点记为 u_{n-1}, 不致混淆时简记为 u. u 点的矢径记为 $\boldsymbol{u}$. D 为 E_n 中有界闭凸体. 所谓 D 沿方向 $\boldsymbol{u}$ 的最大弦长 $\sigma_M(u)$ 由下式定义:

$$\sigma_M(u)=\max_{L_1}\{\sigma;\ \sigma=m(L_1\cap \mathrm{int}D);\ L_1/\!/\boldsymbol{u}\}. \quad (7.4.12)$$

又, 函数

$$r(l,\ u)=\min\{l,\ \sigma_M(u)\},\ l\geqslant 0 \quad (7.4.13)$$

称为 D 的限弦函数.

定义 2 设 $\boldsymbol{u}$ 为单位向量, $\sigma_M(u)$ 是凸体 D 沿方向 $\boldsymbol{u}$ 的最大弦长. 假定 σ 致 $0\leqslant\sigma\leqslant\sigma_M(u)$. 又, Σ 为垂直于 $\boldsymbol{u}$ 的一超平面. 考虑平行于 $\boldsymbol{u}$ 且在 D 的内部截出不小于 σ 之弦长的那些直线 L_1. 这些直线的集与 Σ 的交集之 $(n-1)$ 维体积记为 $A(\sigma,\ u)$. 函数 $A(\sigma,\ u)$称为 D 的限弦投影函数.

当 $\sigma=0$ 时, $A(\sigma,\ u)$就是前面讲过的 D 在 Σ 上的正交投影. 于是(6.3.19)式可写作

$$F=\frac{2(n-1)}{O_{n-2}}\int_{\frac{1}{2}U_{n-1}}A(0,\ u)du. \quad (7.4.14)$$

定理 1 设 D 为 E_n 中有界闭凸体, $\sigma_M(u)$是 D 的最大弦长函数, $r(l,\ u)$为 D 的限弦函数, $A(\sigma,\ u)$为 D 的限弦投影函数. 则有

$$m(l)=\frac{1}{2}O_0O_1\cdots O_{n-2}\int_{\frac{1}{2}U_{n-1}}du\int_{r(l,u)}^{\sigma_M(u)}A(\sigma,\ u)d\sigma. \quad (7.4.15)$$

证明 将(7.4.10)和(7.4.11)二式代入公式(7.4.7), 并利用恒等关系

$$\frac{2\pi}{n-1}O_{n-2}=O_n,\ O_1=2\pi, \quad (7.4.16)$$

我们有

$$m(l)=\frac{1}{2}O_0O_1\cdots O_{n-2}\int_{\substack{L_1\cap D\neq\emptyset\\(\sigma\geqslant l)}}(\sigma-l)dL_1. \quad (7.4.17)$$

对于任意给定的方向 $\boldsymbol{u}$，考虑平行于 $\boldsymbol{u}$ 的 L_1. 我们有

$$dL_1 = da \wedge du, \tag{7.4.18}$$

其中 da 为 Σ 在 $L_1 \cap \Sigma$ 处的体积元，而 du 为 U_{n-1} 的体积元. 因此(7.4.17)式可改写为

$$m(l) = \frac{1}{2} O_0 O_1 \cdots O_{n-2} \int_{\frac{1}{2}U_{n-1}} du \int_{\substack{L_1 \cap D \neq \emptyset \\ (\sigma \geqslant l;\, L_1 /\!/ u)}} (\sigma - l)\, da. \tag{7.4.19}$$

现在考虑下述积分:

$$f(u) = \int_{\substack{L_1 \cap D \neq \emptyset \\ (\sigma \geqslant l;\, L_1 /\!/ u)}} (\sigma - l)\, da = \int_{\substack{L_1 \cap D \neq \emptyset \\ (\sigma \geqslant l;\, L_1 /\!/ u)}} \sigma\, da - l \int_{\substack{L_1 \cap D \neq \emptyset \\ (\sigma \geqslant l;\, L_1 /\!/ u)}} da. \tag{7.4.20}$$

完成定理证明的关键在于揭示这一积分的几何意义. 当 $l \geqslant \sigma_M(u)$ 时，$f(u)=0$. 当 $l < \sigma_M(u)$ 时，$f(u)$ 是两个体积之差: "被减项"是 D 被 $\{L_1;\, L_1 /\!/ \boldsymbol{u},\ \sigma \geqslant l\}$ 截出的部分的体积，"减项"是以 $A(l,\ u)$ 为底、l 为高的柱体的体积. 因此有

$$f(u) = \int_{r(l,u)}^{\sigma_M(u)} A(\sigma,\ u)\, d\sigma, \tag{7.4.21}$$

从而证明了公式(7.4.15).

从刚才对 $f(u)$ 的几何意义的分析中，附带地可得到凸体 D 的体积 V 的一种表达式:

$$V = \int_0^{\sigma_M(u)} A(\sigma,\ u)\, d\sigma. \tag{7.4.22}$$

据此又可将公式(7.4.15)改写为另一形式.

定理 2 设 D 为 E_n 中有界闭凸体，体积为 V. $r(l,\ u)$ 和 $A(\sigma,\ u)$ 分别是 D 的限弦函数和限弦投影函数. 则

$$m(l) = \frac{1}{2} O_1 \cdots O_{n-1} V - \frac{1}{2} O_0 O_1 \cdots O_{n-2} \int_{\frac{1}{2}U_{n-1}} du \int_0^{r(l,u)} A(\sigma,\ u)\, d\sigma. \tag{7.4.23}$$

在多数情况中，求凸体体积较之求最大弦长函数容易一些，因此在实际计算中公式(7.4.23)用得多些.

例 求半径为 a 的 n 维球体的 $m(l)$.

显然有 $\sigma_M(u)=2a,\ r(l,\ u)=l$(设 $l\leqslant 2a$),

$$A(\sigma,\ u)=\varkappa_{n-1}\left(a^2-\frac{\sigma^2}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}},$$

其中 $\varkappa_{n-1}$ 是 $(n-1)$ 维单位球体的体积，即

$$\varkappa_{n-1}=\frac{O_{n-2}}{n-1}=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}. \qquad (7.4.24)$$

应用公式(7.4.15)，得到

$$m(l)=\frac{1}{2}O_1\cdots O_{n-1}\varkappa_{n-1}\int_l^{2a}\left(a^2-\frac{\sigma^2}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}d\sigma. \qquad (7.4.25)$$

若作变换 $\sigma=2a\sin\theta$，则有

$$m(l)=O_1\cdots O_{n-1}\varkappa_{n-1}a^n\int_{\arcsin\frac{l}{2a}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\,d\theta. \qquad (7.4.26)$$

7.4.3 柱体情形

作为公式(7.4.15)或(7.4.23)的特殊情形，让我们来寻求关于柱体的 $m(l)$ 公式.

D_n 表示 E_n 中凸柱体，其正截面 D_{n-1} 为 $(n-1)$ 维平坦凸体，高为 H. D_n 的最大弦长函数、限弦函数和限弦投影函数依次记为 $\sigma_M(u_{n-1})$、$r(l,\ u_{n-1})$ 和 $A_n(\sigma,\ u_{n-1})$；对于 D_{n-1}，则相应地记为 $\sigma_M(u_{n-2})$、$r(l,\ u_{n-2})$ 和 $A_{n-1}(\sigma,\ u_{n-2})$. 设 N 为长度为 l 的线段. 含于 D_n 内的 N 的运动测度记为 $m_n(l)$，含于 D_{n-1} 内的 N 的运动测度记为 $m_{n-1}(l)$.

下面的定理揭示了 $m_n(l)$ 与 $m_{n-1}(l)$ 之间的联系.

定理 D_n 为 E_n 中柱体，如上所述. 随机线段 N 与柱体母线间夹角以 φ 表示，并规定 $h(\varphi)=\max\{H-l\cos\varphi,\ 0\}$. 则有

$$m_n(l)=2O_{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}m_{n-1}(l\sin\varphi)h(\varphi)\sin^{n-2}\varphi\,d\varphi. \qquad (7.4.27)$$

证明 取坐标标架 $(0;\ e_1,\ \cdots,\ e_n)$，并设 e_n 平行于柱体的母线. E_n 中点 $(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 的球坐标记为 $(r,\ \varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_{n-1})$，即

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-1}, \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ x_n = r\cos\varphi_1, \end{cases} \tag{7.4.28}$$

$$0\leqslant r<+\infty,\ 0\leqslant\varphi_1\leqslant\pi,\ \cdots,\ 0\leqslant\varphi_{n-2}\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi_{n-1}\leqslant 2\pi.$$

当 $r=1$ 时，$(1, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1})$ 表示 $(n-1)$ 维单位球面 U_{n-1} 上的点．U_{n-1} 上点的体积元为

$$du_{n-1}=\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_1\wedge\cdots\wedge d\varphi_{n-1}. \tag{7.4.29}$$

在(7.4.28)式中，置 $r=1$ 和 $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$，便得到 U_{n-1} 在超平面 $x_n=0$ 上的投影——$(n-2)$维单位球面 U_{n-2}，其体积元为

$$du_{n-2}=\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_2\wedge\cdots\wedge d\varphi_{n-1}. \tag{7.4.30}$$

由(7.4.29)、(7.4.30)二式，有

$$du_{n-1}=\sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1\wedge du_{n-2}. \tag{7.4.31}$$

设 N 的方向由 $\boldsymbol{u}_{n-1}$ 确定．考虑沿此方向的投影．记

$$f_k(u_{k-1}, l)=\int_{r(l,u_{k-1})}^{\sigma_M(u_{k-1})} A(\sigma, u_{k-1})d\sigma,$$

则有

$$m(l)=\frac{1}{2}O_0O_1\cdots O_{n-2}\int_{\frac{1}{2}U_{n-1}} f_n(u_{n-1}, l)du_{n-1}. \tag{7.4.32}$$

N 在 e_n 上的投影为 $l\cos\varphi_1$．若 $H\leqslant l\cos\varphi_1$，$N$ 不可能含于 $\boldsymbol{D}_n$ 内，从而 $f_n(u_{n-1}, l)=0$；若 $H>l\cos\varphi_1$，由 $f_k(u_{k-1}, l)$ 之几何意义(参看7.4.2段定理1的证明)，有

$$f_n(u_{n-1}, l)=f_{n-1}(u_{n-2}, l\sin\varphi_1)(H-l\cos\varphi_1).$$

综合起来，有

$$f_n(u_{n-1}, l)=f_{n-1}(u_{n-2}, l\sin\varphi_1)h(\varphi_1). \tag{7.4.33}$$

由(7.4.31)、(7.4.32)及(7.4.33)三式，我们有

$$m(l)=\frac{1}{2}O_0O_1\cdots O_{n-2}\int_{\frac{1}{2}U_{n-1}} f_n(u_{n-1}, l)du_{n-1}$$

$$=\frac{1}{2}O_0O_1\cdots O_{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_{U_{n-2}}f_{n-1}(u_{n-2},\ l\sin\varphi_1)du_{n-2}\right\}$$
$$\times h(\varphi_1)\sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1$$
$$=2O_{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}m_{n-1}(l\sin\varphi_1)h(\varphi_1)\sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1.$$

对于 $n=3$ 的情形,有

$$m_3(l)=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}m_2(l\sin\varphi)h(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi. \tag{7.4.34}$$

或者,作变换 $l\sin\varphi=t,\ 0\leqslant t\leqslant l$,则有

$$m_3(l)=\frac{4\pi}{l}\int_0^l m_2(t)\max(H-\sqrt{l^2-t^2},\ 0)\frac{t}{\sqrt{l^2-t^2}}dt. \tag{7.4.35}$$

本段的定理提供了一种计算柱体的 $m(l)$ 的有效方法. 在实际应用中许多常见的几何形体实际上是柱体, 所以公式(7.4.27)或其三维特款(7.4.34)和(7.4.35),是很有用的公式.

7.4.4 E_3 中长方体的 $m(l)$ 与 Buffon 问题

设 D_3 为 E_3 中的长方体, 边长为 a、b 和 c, $c\leqslant b\leqslant a$. N 为长度等于 l 的线段. D_3 内定长线段 N 的运动测度记为 $m_3(l)$. 利用(7.4.35)式,可具体算出这一测度.

(1) 当 $0\leqslant l\leqslant c$ 时,

$$m_3(l)=4\pi\left[\pi abc-\frac{\pi l}{2}(ab+bc+ca)+\frac{2}{3}l^2(a+b+c)-\frac{l^3}{4}\right]. \tag{7.4.36}$$

(2) 当 $c\leqslant l\leqslant b$ 时,

$$m_3(l)=\frac{4\pi}{l}\left\{\frac{\pi}{2}abc^2-\frac{1}{12}c^4+\frac{1}{2}c^2l^2\right.$$
$$+(a+b)\left[\frac{2}{3}l^3+l^2(l^2-c^4)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(l^2-c^2)^{\frac{3}{2}}\right.$$
$$\left.\left.-cl^2\arcsin\frac{c}{l}\right]\right\}. \tag{7.4.37}$$

(3) 当 $b\leqslant l\leqslant \min(\sqrt{b^2+c^2}, a)$ 时，

$$m_3(l)=\frac{4\pi}{l}\Big[\frac{\pi}{2}abc(b+c-2l)-\frac{\pi}{2}bcl^2$$
$$+bl^2(a+c)\arccos\frac{b}{l}+cl^2(a+b)\arccos\frac{c}{l}$$
$$-\frac{1}{12}(b^4+c^4)+\frac{1}{2}l^2(b^2+c^2)+\frac{2}{3}al^3+\frac{1}{4}l^4$$
$$-\frac{1}{3}(a+c)(b^2+2l^2)(l^2-b^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{1}{3}(a+b)(c^2+2l^2)(l^2-c^2)^{\frac{1}{2}}\Big]. \qquad (7.4.38)$$

(4) 当 $a\leqslant l\leqslant\sqrt{b^2+c^2}$ 时，

$$m_3(l)=\frac{4\pi}{l}\Big[\frac{\pi}{2}(a^2bc+ab^2c+abc^2-4abcl)$$
$$+al^2(b+c)\arccos\frac{a}{l}+bl^2(c+a)\arccos\frac{b}{l}$$
$$+cl^2(a+b)\arccos\frac{c}{l}-\frac{1}{12}(a^4+b^4+c^4)$$
$$+\frac{1}{2}l^2(a^2+b^2+c^2-l^2)$$
$$-\frac{1}{3}(b+c)(a^2+2l^2)(l^2-a^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{1}{3}(c+a)(b^2+2l^2)(l^2-b^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{1}{3}(a+b)(c^2+2l^2)(l^2-c^2)^{\frac{1}{2}}\Big]. \qquad (7.4.39)$$

(5) 当 $\sqrt{b^2+c^2}\leqslant l\leqslant a$ 时，

$$m_3(l)=\frac{4\pi}{l}\Big[\frac{\pi}{2}abc(b+c-2l)+\frac{2}{3}al^3-\frac{1}{2}b^2c^2$$
$$+al^2(\sqrt{l^2-b^2-c^2}-\sqrt{l^2-b^2}-\sqrt{l^2-c^2})$$
$$+\frac{a}{3}(l^2-b^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{a}{3}(l^2-c^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{a}{3}(l^2-b^2-c^2)^{\frac{3}{2}}$$
$$+abl^2\arccos\frac{b}{l}+acl^2\arccos\frac{c}{l}$$

$$-ab(l^2+c^2)\arccos\frac{b}{\sqrt{l^2-c^2}}$$

$$-ac(l^2+b^2)\arccos\frac{c}{\sqrt{l^2-b^2}}$$

$$+2abcl\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{l\sqrt{l^2-b^2-c^2}}{bc}\Big]. \tag{7.4.40}$$

(6) 当 $\max(\sqrt{b^2+c^2},\ a)\leqslant l\leqslant\sqrt{c^2+a^2}$ 时，

$$m_3(l)=\frac{4\pi}{l}\Big[\frac{\pi}{2}abc(a+b+c-4l)+\frac{\pi}{2}l^2(ab+bc+ca)$$

$$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{2}b^2c^2+\frac{1}{2}a^2l^2+\frac{1}{4}l^4$$

$$-\frac{1}{3}(b+c)(a^2+2l^2)(l^2-a^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$+al^2(l^2-b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}-al^2(l^2-b^2)^{\frac{1}{2}}-al^2(l^2-c^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{a}{3}(l^2-b^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{a}{3}(l^2-c^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{a}{3}(l^2-b^2-c^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$-ab(l^2+c^2)\arccos\frac{b}{\sqrt{l^2-c^2}}$$

$$-ac(l^2+b^2)\arccos\frac{c}{\sqrt{l^2-b^2}}$$

$$-al^2(b+c)\arcsin\frac{a}{l}+abl^2\arccos\frac{b}{l}$$

$$+acl^2\arccos\frac{c}{l}+2abcl\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{l\sqrt{l^2-b^2-c^2}}{bc}\Big]. \tag{7.4.41}$$

(7) 当 $\sqrt{c^2+a^2}\leqslant l\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 时，

$$m_3(l)=\frac{4\pi}{l}\Big\{\frac{\pi}{2}bc(l-a)^2+\frac{\pi}{2}ac(l-b)^2+\frac{1}{12}c^4$$

$$-\frac{1}{2}c^2(a^2+b^2+l^2)$$

$$+al^2[(l^2-b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}-(l^2-b^2)^{\frac{1}{2}}]$$

$$+bl^2[(l^2-a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}-(l^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]$$

$$+\frac{a}{3}(l^2-b^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{a}{3}(l^2-b^2-c^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{b}{3}(l^2-a^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{b}{3}(l^2-a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}+abl^2\arccos\frac{b}{l}$$

$$-abl^2\arcsin\frac{a}{l}+ab(l^2+c^2)\arcsin\frac{a}{\sqrt{l^2-c^2}}$$

$$-ab(l^2+c^2)\arccos\frac{b}{\sqrt{l^2-c^2}}$$

$$-bc(l^2+a^2)\arccos\frac{c}{\sqrt{l^2-a^2}}$$

$$-ac(l^2+b^2)\arccos\frac{c}{\sqrt{l^2-b^2}}$$

$$+2abcl\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{l\sqrt{l^2-a^2-c^2}}{ac}$$

$$+2abcl\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{l\sqrt{l^2-b^2-c^2}}{bc}\Big\}. \tag{7.4.42}$$

算出 E_3 中长方体的 $m(l)$，立即可以得到 E_3 中推广的 Buffon 问题的解.

设 D_3 和前面一样是边长为 a、b 和 c 的长方体，$c\leqslant b\leqslant a$. 以 D_3 作为基本区域在 E_3 中构成网格. 或者换一个说法，此网格由三组等间隔平行平面族构成，这三组平面族两两正交. 以 H 表示此网格. N 为长度等于 l 的线段，随机投掷于 E_3 中，试求 N 与网格 H 相遇的概率.

处理问题的方法完全类似于平面网格的情形.

取 n^3 个长方体(基本区域)，构成有限网格 H_n. H_n 的外缘为边长为 na、nb 和 nc 的长方体. 假定 n 足够大致使 $l<nc$. 那么含于此大长方体内的 N 的运动测度为

$$\eta=4\pi\Big[\pi n^3abc-\frac{1}{2}\pi n^2l(ab+bc+ca)+\frac{2}{3}nl^2(a+b+c)-\frac{l^3}{4}\Big]. \tag{7.4.43}$$

若已知 N 位于此大长方体内，N 与网格 H_n 相遇的概率为

$$p_n^{(3)}=\frac{1}{\eta}\Big\{4\pi\Big[\pi n^3abc-\frac{\pi}{2}n^2l(ab+bc+ca)$$

$$+\frac{2}{3}nl^2(a+b+c)-\frac{l^2}{4}\Big]-n^3m(l)\Big\}, \qquad (7.4.44)$$

其中 $m(l)$ 为含于 D_3 内的 N 的运动测度. 令 $n\to\infty$, 得 N 与网格 H 相遇的概率:

$$p^{(3)}=\frac{4\pi^2abc-m(l)}{4\pi^2abc}. \qquad (7.4.45)$$

根据 l 的范围, 选用 $m(l)$ 的相应表达式((7.4.36)～(7.4.42)之一)代入(7.4.45)式, 则得到具体结果. 例如, 若 l 适合 $0\leqslant l\leqslant c$, 则

$$p^{(3)}=\frac{1}{12\pi abc}[6\pi l(ab+bc+ca)-8l^2(a+b+c)+3l^3]. \qquad (7.4.46)$$

自然, 当 l 在其他范围时亦可立即写出相应的结果, 在此不需一一列出.

作为公式(7.4.46)的推论, 还可由此引出另外的结果. 在(7.4.46)式中令 $a\to\infty$, 则有

$$p^{(2)}=\frac{3\pi l(b+c)-4l^2}{6\pi bc}, \qquad (7.4.47)$$

$p^{(2)}$ 是 N 与两组相互正交的等间隔平面族网格相遇的概率. 若进一步, 在(7.4.47)式中令 $b\to\infty$, 便得到 N 与间隔为 c 的平行平面族相遇的概率为

$$p^{(1)}=\frac{l}{2c}. \qquad (7.4.48)$$

对于适合 $c\leqslant l\leqslant b$ 的 l, 有如下结果:

$$p^{(3)}=(\pi abcl)^{-1}\Big\{\pi abcl-\frac{\pi}{2}abc^2+\frac{1}{12}c^4-\frac{1}{2}c^2l^2$$

$$-(a+b)\Big[\frac{2}{3}l^3+l^2(l^2-c^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(l^2-c^2)^{\frac{3}{2}}-cl^2\arcsin\frac{c}{l}\Big]\Big\}, \qquad (7.4.49)$$

$$p^{(2)}=(\pi bcl)^{-1}\Big[\pi bcl-\frac{\pi}{2}bc^2-\frac{2}{3}l^3-l^2(l^2-c^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{3}(l^2-c^2)^{\frac{3}{2}}+cl^2\arcsin\frac{c}{l}\Big], \tag{7.4.50}$$

$$p^{(1)}=1-\frac{c}{2l}. \tag{7.4.51}$$

注意公式(7.4.51)给出的是长针 Buffon 问题的解.

7.4.5 E_n 中长方体的 $m(l)$ 与 Buffon 问题

设 I 为 E_n 中长方体，边长为 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$. N 为长度等于 l 的线段. 利用递推关系 (7.4.27) 不难得出含于 I 内的 N 的运动测度. 置

$$\begin{cases} h_1=\max\{a_1-l\cos\varphi_1,\ 0\} \\ h_i=\max\{a_i-l\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{i-1},\ 0\}, \qquad 2\leqslant i\leqslant n-1 \\ h_n=\max\{a_n-l\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},\ 0\} \end{cases} \tag{7.4.52}$$

则有

$$m(l)=m\{N\subset I\}=\frac{1}{2}O_0O_1\cdots O_{n-2}\int_{\frac{1}{2}U_{n-1}}h_1\cdots h_n du_{n-1}, \tag{7.4.53}$$

其中

$$du_{n-1}=\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}d\varphi_1\wedge\cdots\wedge d\varphi_{n-2}, \tag{7.4.54}$$

以 I 作为基本区域可构成 E_n 中网格. 与上一段一样，我们可以讨论小针 N 与此网格相遇的概率. 我们有

$$p^{(n)}=1-\frac{2}{O_{n-1}a_1\cdots a_n}\int_{\frac{1}{2}U_{n-1}}h_1\cdots h_n du_{n-1}. \tag{7.4.55}$$

令 $a_2,\ \cdots,\ a_n\to\infty$，则有

$$p^{(1)}=1-\frac{2O_{n-2}}{O_{n-1}}\Big\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\varphi_1 d\varphi_1-\frac{l}{(n-1)a_1}\Big\},\quad l\leqslant a_1; \tag{7.4.56}$$

$$p^{(1)}=1-\frac{2}{O_{n-1}a_1}\int_{\frac{1}{2}U_{n-1}}h_1\,du_{n-1}$$

$$=1-\frac{2O_{n-2}}{O_{n-1}}\left\{\int_{\arccos\frac{a_1}{l}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1\right.$$

$$\left.-\frac{l}{(n-1)a_1}\left[1-\left(1-\frac{a_1^2}{l^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]\right\},\quad l>a_1.\qquad(7.4.57)$$

根据(7.4.31)式，有

$$O_{n-1}=2O_{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1,$$

于是(7.4.56)式变成

$$p^{(1)}=\frac{2O_{n-2}l}{(n-1)O_{n-1}a_1},\quad l\leqslant a_1.\qquad(7.4.58)$$

又，直接计算可知(7.4.57)式可写成下列形式：

$$p^{(1)}=1-\frac{2O_{n-2}}{O_{n-1}}\left\{\frac{a_1}{l}\sum_{k=0}^{\frac{n-4}{2}}\frac{(n-1-2k)!!}{(n-2-2k)!!}\left(1-\frac{a_1^2}{l^2}\right)^{\frac{n-3-2k}{2}}\right.$$

$$+\frac{(n-3)!!}{(n-2)!!}\arcsin\frac{a_1}{l}-\frac{l}{(n-1)a_1}$$

$$\left.\times\left[1-\left(1-\frac{a_1^2}{l^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]\right\},\ l>a_1,\ n\text{ 为偶数},\qquad(7.4.59)$$

$$p^{(1)}=1-\frac{2O_{n-2}}{O_{n-1}}\left\{\frac{a_1}{l}\sum_{k=0}^{\frac{n-5}{2}}\frac{(n-1-2k)!!}{(n-2-2k)!!}\left(1-\frac{a_1^2}{l^2}\right)^{\frac{n-3-2k}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{(n-3)!!}{(n-2)!!}\cdot\frac{a_1}{l}-\frac{l}{(n-1)a_1}\left[1-\left(1-\frac{a_1^2}{l^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]\right\},$$

$$l>a_1,\ n\text{ 为奇数}.\qquad(7.4.60)$$

§7.5 关于弦幂积分不等式

本节第一段介绍 E_3 中弦幂积分不等式，第二段讲 E_2 和 E_3 中弦幂积分不等式对一类几何概率问题的应用，第三段讨论弦幂积分不等式到 E_n 的推广（前两段取材于吴大任[8]，第三段的内容见

任德麟[61]).

7.5.1 E_3 中弦幂积分不等式

设 K 为 n 维欧氏空间中有界闭凸体, G 为与 K 相交的直线, σ 表示弦 $G\cap K$ 的长. 积分

$$I_m^{(n)}=\int_{G\cap K\neq\emptyset}\sigma^m\,dG,\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{7.5.1}$$

称为凸体 K 的(幂次为 m 的)弦幂积分. 序列 $\{I_m^{(n)}\}(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 称为凸体 K 的弦幂积分序列. 注意, 在我们现在的记号中 n 表示空间的维数而 m 是弦幂积分的编号. 在 E_2 和 E_3 的情形, 通常略去维数的标记.

在讨论弦幂积分的时候, 常常涉及另一个积分, 即

$$J_m^{(n)}=\int_{P_1,P_2\in K}t^m\,dP_1\wedge dP_2, \tag{7.5.2}$$

其中 t 表示 P_1 与 P_2 之间的距离, $m\geqslant -n+1$ 为整数. 于(6.5.14)式两边同乘以 t^{m-n-1} 然后积分, 则不难得到下面的关系(参照6.5.3段的讨论):

$$I_m^{(n)}=\frac{1}{2}m(m-1)J_{m-n-1}^{(n)},\ m\geqslant 2. \tag{7.5.3}$$

在 E_2 里, 已经知道

$$I_0=L,\ I_1=\pi F,\ I_3=3F^2, \tag{7.5.4}$$

其中 L、F 依次表示凸域 K 的周长和面积. 在积分 I_1 和其他 I_m 之间, 有以下一些关系:

$$I_0\geqslant 2I_1^{1/2}, \tag{7.5.5}$$

$$I_2\leqslant\frac{2^4}{3\pi^2}I_1^{3/2}, \tag{7.5.6}$$

$$I_m\geqslant\frac{2\cdot4\cdots m}{3\cdot5\cdots(m+1)}\pi\left(\frac{2}{\pi}I_1^{1/2}\right)^{m+1},\ m=4,\ 6,\ 8,\ \cdots, \tag{7.5.7}$$

$$I_m\geqslant\frac{1\cdot3\cdots m}{2\cdot4\cdots(m+1)}\cdot\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{2}{\pi}I_1^{1/2}\right)^{m+1},\ m=5,\ 7,\ 9,\ \cdots, \tag{7.5.8}$$

其中等式成立的充要条件是 K 为圆盘.

注意,若在(7.5.7)式中令 $m=2$, 并把不等号方向颠倒, 就得(7.5.6)式. 又,若在(7.5.8)式中令 $m=1, 3$, 并把不等式改为等式, 就得到平凡关系 $I_1=I_1$ 和已知的等式 $I_3=3F^2$. 另外, I_0 与 I_1 的关系(7.5.5)实际上就是经典的等周不等式. 以上提到的这些等式或不等式关系, 在本书第二章中都曾有叙述, 但其中除(7.5.5)和 Crofton 公式 $I_3=3F^2$ 外,当时并未给出证明.

本段主旨在于表述并证明 E_3 中一组弦幂积分不等式(即下面的定理 4), 同时附带给出(7.5.6)~(7.5.8)的证明. 为此, 先作一些准备.

Carlemann 定理(见[9]) 设 K 是 E_2 中周长(或面积)一定的凸集. t 表示两点 P_1, P_2 之间的距离, $f(t)$是单调递减的正函数. 则当 K 是圆盘时,而且只有这时,积分

$$J=\int_{P_1, P_2\in K} f(t)dP_1\wedge dP_2 \tag{7.5.9}$$

达到极大值.

考察 Carlemann 对上述定理的证明,不难发现下面两点事实:

1) 为了把 Carlemann 定理推广到 E_n, 只须在他的证明中, 不取一个二重积分的导函数,而取一个相应的 n 重积分的导函数.

2) 若在 Carlemann 的证明中, 把不等号颠倒, 就得到关于 $f(t)$是单调递增正函数的假设下对应结论的证明.

综合这两点,就得到 Carlemann 定理的下述推广:

定理 1 设 K 是 E_n 中表面积(或体积)一定的凸集. t 表示两点 P_1, P_2 之间的距离,而 $f(t)$是单调递减(增)的正函数. 则当 K 是 n 维球体时, 而且只有这时,积分(7.5.9)达到极大(小)值.

把定理 1 应用于积分

$$J_m^{(n)}=\int_{P_1, P_2\in K} t^m\, dP_1\wedge dP_2, \tag{7.5.10}$$

就得

定理 2 若 $m<0(m>0)$, 则当 K 是 n 维球时, 而且只有这

时，积分 $J_m^{(n)}$ 达到极大(小)值.

通过关系(7.5.3)，由定理 2，立刻可以推得

定理 3 设 K 为 E_n 中表面积（或体积）一定的凸集. 若 $2\leqslant m\leqslant n$ ($m\geqslant n+2$)，则当 K 是 n 维球体时，而且只有这时，$I_m^{(n)}$ 达到极大(小)值.

定理 3 是推导任意维欧氏空间弦幂积分不等式的依据.

定理 4(吴大任[8]) 设 K 为 E_3 中任意有界凸集，I_m ($m=0, 1, 2, \cdots$) 为 K 的弦幂积分. 则有

$$\left(\frac{m+2}{\pi^2}I_m\right)^3-\left(\frac{3}{\pi^2}I_1\right)^{m+2}\begin{cases}\geqslant 0, & \text{当 } m=0,\\ =0, & \text{当 } m=1,\\ \leqslant 0, & \text{当 } m=2,\ 3,\\ =0, & \text{当 } m=4,\\ \geqslant 0, & \text{当 } m\geqslant 5,\end{cases} \qquad (W)$$

在 (W) 里，等式成立的充要条件是 K 为球体. 我们约定用 (W-m)，$m=0, 1, 2, \cdots$来表示(W)中各不等式或等式.

证明 设 K 的体积和表面积分别为 V 和 O. 则有

$$I_0=\frac{\pi}{2}O,\ I_1=2\pi V, \qquad (7.5.11)$$

它们分别是前面提到过的 (7.1.32)、(7.1.31) 二式. 由此可见 (W-0)就是经典的等周不等式，(W-4)正好是 E_3 中的 Crofton 公式(见(6.5.13)式)

$$I_4=6V^2. \qquad (7.5.12)$$

另外，(W-1) 是平凡关系 $I_1=I_1$. 这样，待证的款项实际上是 (W-m)，$m=2, 3$ 和(W-m)，$m\geqslant 5$.

完成证明的关键是算出球体的弦幂积分. 对于 E_3 中半径为 R 的球体，

$$I_m(\text{球})=2\pi\int_0^{2R}\frac{\pi\sigma}{2}\cdot\sigma^m d\sigma=\frac{2^{m+2}}{m+2}\pi^2R^{m+2}. \qquad (7.5.13)$$

因此体积为 V (K 的体积)的球体的弦幂积分为

$$I_m(\text{球})=\frac{2^{m+2}}{m+2}\pi^2\left(\frac{3}{4\pi}V\right)^{\frac{m+2}{3}}$$

$$=\frac{2^{m+2}}{m+2}\pi^2\left(\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{I_1}{2\pi}\right)^{\frac{m+2}{3}}=\frac{\pi^2}{m+2}\left(\frac{3}{\pi^2}I_1\right)^{\frac{m+2}{3}}. \tag{7.5.14}$$

再应用定理3,立即推知欲证之不等式.

同样,为了证明 E_2 中的弦幂积分不等式,只须求出圆盘的弦幂积分,然后援用定理3即可. 对于半径为 R 的圆盘,

$$I_m(\text{圆盘})=\int\sigma^m\,dG=\int\sigma^m\,dp\wedge d\varphi$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2R\sin t)^m R\sin t\,dt,$$

从而

$$I_m(\text{圆盘})=\begin{cases}\dfrac{2\cdot4\cdots m}{3\cdot5\cdots(m+1)}2^{m+1}\pi R^{m+1}, & \text{当}m\text{为正偶数},\\[2ex] \dfrac{1\cdot3\cdots m}{2\cdot4\cdots(m+1)}2^m\pi^2R^{m+1}, & \text{当}m\text{为正奇数}.\end{cases} \tag{7.5.15}$$

7.5.2 几何概率上的应用

吴大任在文献[10]中推得了 E_2 和 E_3 里一些线性空间偶的密度公式,并在此基础上讨论了关于凸集的一类特定类型的几何概率问题. 值得注意的是这些几何概率均可用凸集的一些整体不变量简洁地表出. 在文献[8]中,进一步利用 E_2 和 E_3 中的弦幂积分不等式,给出这些几何概率的最大值. 现简要介绍如下:

(1) 在 E_2 里,设 N 表示由点 P 到直线 G 的垂线,Q 表示垂足,则有密度关系

$$dP\wedge dG=dP_N\wedge dQ_N\wedge dN, \tag{7.5.16}$$

其中 dP_N, dQ_N 依次表示 P, Q 在 N 上的密度. 若 $P\in K, G\cap K\neq\emptyset$,则 $Q\in K$(因而线段 $PQ\in K$)的概率是

$$\frac{I_2}{LF}\leqslant\frac{8}{3\pi}\approx0.4883, \tag{7.5.17}$$

推导不等式时，用到了(7.5.6)和(7.5.7).

(2) 在 E_3 里，设 N 为由点 P 到平面 L_2 的垂线，Q 为垂足，则有密度关系

$$dP\wedge dL_2=dP_N\wedge dQ_N\wedge dN, \tag{7.5.18}$$

其中 P_N, Q_N 为 P, Q 在 N 上的密度. 若 $P\in K$, $L_2\cap K\neq\emptyset$, 则 $Q\in K$ 的概率是

$$\frac{I_2}{MV}\leqslant\frac{3}{4}. \tag{7.5.19}$$

这里用到了(W-2)、(W-0)及 Minkowski 不等式$M^2-8I_0\geqslant 0$(即 $M^2-4\pi O\geqslant 0$, 见(7.2.31)式).

(3) 在 E_3 里，设 N 为由点 P 到直线 G 的垂线，Q 为垂足，E 为 P 和 G 所定的平面，t 表示线段 PQ 的长，则

$$dP\wedge dG=t\,dP_N\wedge dQ_N\wedge dN_E\wedge dE, \tag{7.5.20}$$

其中 P_N、Q_N 的意义如前，dN_E 表示 N 在 E 上的密度. 若 $P\in K$, $G\cap K\neq\emptyset$, 则 $Q\in K$ 的概率是

$$\frac{2I_3}{OV}\leqslant\frac{4}{5}. \tag{7.5.21}$$

这里用到(W-0)和(W-3).

(4) 在 E_3 里，设 N 为二直线 G, G' 的公垂线，Q 和 Q' 是垂足，ω 为 G、G' 之间的角，则

$$dG\wedge dG'=\sin^2\omega\, dQ_N\wedge dQ'_N\wedge dG_N\wedge dG'_N\wedge dN, \tag{7.5.22}$$

其中 dQ_N, dQ'_N 是 Q、Q' 在 N 上的密度，dG_N, dG'_N 是 G、G' 绕 N 的(角)密度. 若 $G\cap K\neq\emptyset$, $G'\cap K\neq\emptyset$, 则 $Q\in K$, $Q'\in K$ 的概率是

$$\frac{I_2}{O^2}\leqslant\frac{1}{4}. \tag{7.5.23}$$

这里用了(W-0)和(W-2).

在推导以上几个几何概率的上界估计时，用到的不等式有 E^2 和 E_3 中弦幂积分不等式以及 Minkowski 不等式，而这些不等式等号成立的充要条件是 K 为圆盘或球体. 由此可见，当且仅当 K

为圆盘或球体时，这些几何概率达到其最大值．另外，本段所引述的密度关系(7.5.16)、(7.5.18)、(7.5.20)及(7.5.22)诸式，利用§6.2中的方法不难推出．

7.5.3 E_n中弦幂积分不等式

本段介绍任意维欧氏空间中的弦幂积分不等式．

设K为E_n中有界闭凸体，K的体积和表面积(∂K的$(n-1)$维体积)分别记为V和F．K的弦幂积分$I_m^{(n)}$由(7.5.1)式所定义，即

$$I_m^{(n)}=\int_{L_1\cap K\neq\emptyset}\sigma^m\,dL_1,\ m=0,\ 1,\ 2\cdots\cdots.$$

引进如下记号：

$$\Delta_m^{(2k)}=I_m^{(2k)}-O_{2k-1}2^{m+k-1}\pi^{k-1}\frac{m!!}{(m+2k-1)!!}\times\left[\frac{2(2k)}{O_{2k-1}^2}I_1^{(2k)}\right]^{\frac{m+2k-1}{2k}}\cdot\frac{\pi}{2},\ m\text{为奇},\quad(7.5.24)$$

$$\Delta_m^{(2k)}=I_m^{(2k)}-O_{2k-1}2^{m+k-1}\pi^{k-1}\frac{m!!}{(m+2k-1)!!}\times\left[\frac{2(2k)}{O_{2k-1}^2}I_1^{(2k)}\right]^{\frac{m+2k-1}{2k}},\ m\text{为偶},\quad(7.5.25)$$

$$\Delta_m^{(2k+1)}=I_m^{(2k+1)}-O_{2k}2^{m+k-1}\pi^{k}\frac{m!!}{(m+2k)!!}\times\left[\frac{2(2k+1)}{O_{2k}^2}I_1^{(2k+1)}\right]^{\frac{m+2k}{2k+1}},\text{对一切}m,\quad(7.5.26)$$

其中k为正整数，m是弦幂积分的编号(非负整数)．又，“双阶乘”的定义是：$p!!=p(p-2)(p-4)\cdots2$(p为偶)；$p!!=p(p-2)\cdots1$(p为奇)．

定理(任德麟[6]) 设K为E_n中有界闭凸体($n\geqslant2$)，$I_m^{(n)}$为K的弦幂积分，$\Delta_m^{(n)}$由(7.5.24)、(7.5.25)和(7.5.26)所定义．则有

$$\Delta_m^{(n)}\begin{cases}\geqslant 0, & \text{当 } m=0,\\ =0, & \text{当 } m=1,\\ \leqslant 0, & \text{当 } m=2,3,\cdots,n,\\ =0, & \text{当 } m=n+1,\\ \geqslant 0, & \text{当 } m\geqslant n+2,\end{cases} \tag{WR}$$

其中各不等式等号成立的充要条件是 K 为 n 维球体.

和 7.5.1 段一样，以 $(WR\text{-}m)$ 表 (WR) 中编号为 m 的不等式或等式.

证明 首先，考察 $(WR\text{-}1)$, $(WR\text{-}0)$ 及 $(WR\text{-}n+1)$ 三款.

$(WR\text{-}1)$ 为平凡等式 $I_1^{(n)}=I_1^{(n)}$.

$(WR\text{-}0)$ 实际上是 E_n 中经典的等周不等式. 事实上，当 $n=2k$ 时，$(WR\text{-}0)$ 为

$$I_0^{(2k)}\geqslant O_{2k-1}2^{k-1}\pi^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!!}\left[\frac{2(2k)}{O_{2k-1}^2}I_1^{(2k)}\right]^{\frac{2k-1}{2k}}; \tag{7.5.27}$$

当 $n=2k+1$ 时，$(WR\text{-}0)$ 为

$$I_0^{(2k+1)}\geqslant O_{2k}2^{k-1}\pi^k\frac{1}{(2k)!!}\left[\frac{2(2k+1)}{O_{2k}^2}I_1^{(2k+1)}\right]^{\frac{2k}{2k+1}}. \tag{7.5.28}$$

利用关系(见(6.7.11)式)

$$I_0^{(n)}=\frac{O_n}{2O_1}F. \tag{7.5.29}$$

和

$$I_1^{(n)}=\frac{1}{2}O_{n-1}V, \tag{7.5.30}$$

(7.5.27)和(7.5.28)二式变成

$$F\geqslant O_{2k-1}\cdot\frac{1}{O_{2k}}\cdot 2^{k+1}\pi^k\cdot\frac{1}{(2k-1)!!}\left[\frac{2k}{O_{2k-1}}V\right]^{\frac{2k-1}{2k}}, \tag{7.5.31}$$

$$F\geqslant O_{2k}\cdot\frac{1}{O_{2k+1}}\cdot 2^{k+1}\pi^{k+1}\cdot\frac{1}{(2k)!!}\left[\frac{2k+1}{O_{2k}}V\right]^{\frac{2k}{2k+1}}. \tag{7.5.32}$$

另一方面，由

$$O_s=\frac{2\pi^{\frac{s+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)},\ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

可推知

$$O_{2k}=2^{k+1}\pi^{k}\cdot\frac{1}{(2k-1)!!},\ O_{2k+1}=2^{k+1}\pi^{k+1}\cdot\frac{1}{(2k)!!}. \tag{7.5.33}$$

利用关系(7.5.33)，不难看出(7.5.31)与(7.5.32)可统一为下式：

$$F\geqslant O_{n-1}\left(\frac{n}{O_{n-1}}V\right)^{\frac{n-1}{n}}, \tag{7.5.34}$$

而此式正是经典的等周不等式。

现在再来看(WR-$n+1$)。若 n 为偶数，则(W-$n+1$)为

$$I_{n+1}^{(n)}=O_{n-1}2^{n+\frac{n}{2}}\ \pi^{\frac{n}{2}-1}\cdot\frac{(n+1)!!}{(2n)!!}\left[\frac{2n}{O_{n-1}^2}I_1^{(n)}\right]^2\cdot\frac{\pi}{2}; \tag{7.5.35}$$

若 n 为奇数，则(W-$n+1$)为

$$I_{n+1}^{(n)}=O_{n-1}2^{n+\frac{n}{2}}\ \pi^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{(n+1)!!}{(2n)!!}\left[\frac{2n}{O_{n-1}^2}I_1^{(n)}\right]^2. \tag{7.5.36}$$

不管是哪一种情况，在(7.5.35)式或(7.5.36)式中计及(7.5.30)和(7.5.33)二式，将变成

$$I_{n+1}^{(n)}=\frac{n(n+1)}{2}V^2. \tag{7.5.37}$$

而此式是已知的 Crofton 公式(6.5.13)。

据以上分析，(WR-m)，$m=0,\ 1,\ n+1$ 三款或为平凡等式或为已知结果。下面我们来讨论(WR-m)，$m=2,\cdots,n$ 和(WR-m)，$m\geqslant n+2$。为清晰起见，分成若干步骤。

第一步．一个降维关系．

设 K 为 E_n 中有界凸体，L_r 为 r 维平面，$K_r\triangleq L_r\cap K$．$L_1^{(r)}$ 为位于 L_r 中的直线，由(6.2.27)和(6.2.17)二式可得下述降维关系：

$$\int_{L_1\cap K\neq\emptyset}\sigma^m\,dL_1=\frac{O_{r-2}\cdots O_0}{O_{n-2}\cdots O_{n-r}}\int_{L_1\cap K\neq\emptyset}\left[\int_{L_1^{(r)}\cap K_r\neq\emptyset}\sigma^m\,dL_1^{(r)}\right]dL_r. \tag{7.5.38}$$

第二步．E_n 中球体的弦幂积分．

设 B 为 E_n 中半径等于 R 的球体，其弦幂积分记为 $I_m^{(n)}(R)$．则可以证明当 $n=2k$ 和 $n=2k+1$ 时，

$$I_m^{(2k)}(R)=O_{2k-1}2^{m+k-1}\pi^{k-1}\frac{m!!}{(m+2k-1)!!}R^{m+2k-1}\cdot\frac{\pi}{2},\quad m\text{ 为奇数}, \tag{7.5.39}$$

$$I_m^{(2k)}(R)=O_{2k-1}2^{m+k-1}\pi^{k-1}\frac{m!!}{(m+2k-1)!!}R^{m+2k-1},\quad m\text{ 为偶数}, \tag{7.5.40}$$

$$I_m^{(2k+1)}(R)=O_{2k}2^{m+k-1}\pi^{k}\frac{m!!}{(m+2k-1)!!}R^{m+2k},\quad \text{对一切 } m. \tag{7.5.41}$$

今用数学归纳法证明以上三式．由 (7.5.15) 式可知当 $n=2$ 时结论成立．余下的问题是证实下面的 1° 和 2°．

1° 若结论对于 $n=2t$ 成立，则对于 $n=2t+1$ 亦成立．

假定结论对于 $n=2t$ 成立，即设

$$I_m^{(2t)}(R)=O_{2t-1}2^{m+t-1}\pi^{t-1}\frac{m!!}{(m+2t-1)!!}R^{m+2t-1}\cdot\frac{\pi}{2},\quad m\text{ 为奇数}, \tag{7.5.42}$$

$$I_m^{(2t)}(R)=O_{2t-1}2^{m+t-1}\pi^{t-1}\frac{m!!}{(m+2t-1)!!}R^{m+2t-1},\quad m\text{ 为偶数}. \tag{7.5.43}$$

现设 B 为 E_{2t+1} 中半径为 R 的球体．由(7.5.38)式，

$$I_m^{(2t+1)}(R)=\frac{O_0}{O_{2t-1}}\int_{L_{2t}\cap B\neq\emptyset}\left[\int_{L_1^{(2t)}\cap B_{2t}\neq\emptyset}\sigma^m\,dL_1^{(2t)}\right]dL_{2t}, \tag{7.5.44}$$

其中 $B_{2t}\triangleq L_{2t}\cap B$ 为 E_{2t} 中的球体．以 ρ 表示 B 的中心到 L_{2t} 的距离，则 B_{2t} 的半径为 $(R^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}$．由归纳法假设 (7.5.42) 和 (7.5.43)，应有

$$\int_{L_1^{(2t)}\cap B_{2t}\neq\emptyset} \sigma^m\, dL_1^{(2t)} = O_{2t-1}2^{m+t-1}\pi^{t-1}\frac{m!!}{(m+2t-1)!!}$$

$$\times (R^2-\rho^2)^{\frac{m+2t-1}{2}}\cdot\frac{\pi}{2},\ m\text{ 为奇数,}$$

$$(7.5.45)$$

$$\int_{L_1^{(2t)}\cap B_{2t}\neq\emptyset} \sigma^m\, dL_1^{(2t)} = O_{2t-1}2^{m+t-1}\pi^{t-1}\frac{m!!}{(m+2t-1)!!}$$

$$\times (R^2-\rho^2)^{\frac{m+2t-1}{2}},\ m\text{ 为偶数.}$$

$$(7.5.46)$$

当m为奇数时，以(7.5.45)式代入(7.5.44)式并注意

$$dL_{2t}=d\rho\wedge du_{2t},$$

则有

$$I_m^{(2t+1)}(R)=O_{2t-1}2^{m+t-1}\pi^{t-1}\cdot\frac{m!!}{(m+2t-1)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{O_0}{O_{2t-1}}\cdot O_{2t}$$

$$\times\int_0^R (R^2-\rho^2)^{\frac{m+2t-1}{2}}d\rho$$

$$=O_{2t}2^{m+t-1}\pi^t\cdot\frac{m!!}{(m+2t-1)!!}\cdot R^{m+2t}$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{m+2t}\,d\theta$$

$$=O_{2t}2^{m+t-1}\pi^t\cdot\frac{m!!}{(m+2t)!!}\,R^{m+2t}. \qquad (7.5.47)$$

当m为偶数时，将(7.5.46)式代入(7.5.44)式，则有

$$I_m^{(2t+1)}(R)=O_{2t-1}2^{m+t-1}\pi^{t-1}\cdot\frac{m!!}{(m+2t-1)!!}\cdot\frac{O_0}{O_{2t-1}}\cdot O_{2t}$$

$$\times\int_0^R (R^2-\rho^2)^{\frac{m+2t-1}{2}}d\rho$$

$$=O_0O_{2t}2^{m+t-1}\pi^{t-1}\cdot\frac{m!!}{(m+2t-1)!!}\,R^{m+2t}$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{m+2t}\,d\theta$$

$$=O_{2t}2^{m+t-1}\pi^t\cdot\frac{m!!}{(m+2t)!!}\,R^{m+2t}, \qquad (7.5.48)$$

将上二式与(7.5.41)式对照，可见对 $n=2t+1$ 结论亦成立。

2° 若结论对于 $n=2t-1$ 成立，则对于 $n=2t$ 亦成立。

假定结论对于 $n=2t-1$ 成立，即设

$$I_m^{(2t-1)}(R)=O_{2t-2}2^{m+t-2}\pi^{t-1}\frac{m!!}{(m+2t-2)!!}R^{m+2t-2}. \tag{7.5.49}$$

与第 1° 款类似，对于 E_{2t} 中的球体 B，利用(7.5.38)式、归纳法假设以及 $dL_{2t-1}=d\rho\wedge du_{2t-1}$，有

$$\begin{aligned}I_m^{(2t)}(R)&=\frac{O_0}{O_{2t-2}}\int_{L_{2t-1}\cap B\neq\emptyset}\left[\int_{L_1^{(2t-1)}\cap B_{2t-1}\neq\emptyset}\sigma^m dL_1^{(2t-1)}\right]dL_{2t-1}\\&=O_{2t-2}2^{m+t-2}\pi^{t-1}\cdot\frac{m!!}{(m+2t-2)!!}\cdot\frac{O_0}{O_{2t-2}}\cdot O_{2t-1}\\&\quad\times\int_0^R(R^2-\rho^2)^{\frac{m+2t-2}{2}}d\rho\\&=O_{2t-1}2^{m+t-1}\pi^{t-1}\cdot\frac{m!!}{(m+2t-2)!!}R^{m+2t-1}\\&\quad\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{m+2t-1}d\theta,\end{aligned}$$

于是，当 m 为奇数时，

$$I_m^{(2t)}(R)=O_{2t-1}2^{m+t-1}\pi^{t-1}\frac{m!!}{(m+2t-1)!!}R^{m+2t-1}\cdot\frac{\pi}{2}; \tag{7.5.50}$$

当 m 为偶数时，

$$I_m^{(2t)}(R)=O_{2t-1}2^{m+t-1}\pi^{t-1}\cdot\frac{m!!}{(m+2t-1)!!}R^{m+2t-1}. \tag{7.5.51}$$

上二式吻合于(7.5.39)和(7.5.40)，这表明对于 $n=2t$ 结论亦成立。

第三步　运用 7.5.1 段定理 3 完成证明。

体积等于 V(K 的体积)的球体的半径为

$$R=\left(\frac{nV}{O_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{7.5.52}$$

利用关系(7.5.30)，则有

$$R=\left(\frac{2n}{O_{n-1}^2}I_1^{(n)}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{7.5.53}$$

代入(7.5.39)～(7.5.41)，得到体积与 K 相同的球体的弦幂积分 $I_m^{(n)}(R)$（注意，由(7.5.30)式，$I_1^{(n)}(R)=I_1^{(n)}$）：

$$I_m^{(2k)}(R)=O_{2k-1}2^{m+k-1}\pi^{k-1}\cdot\frac{m!!}{(m+2k-1)!!}\times\left[\frac{2(2k)}{O_{2k-1}^2}I_1^{(2k)}\right]^{\frac{m+2k-1}{2k}}\cdot\frac{\pi}{2},\quad m\text{ 为奇数}, \tag{7.5.54}$$

$$I_m^{(2k)}(R)=O_{2k-1}2^{m+k-1}\pi^{k-1}\cdot\frac{m!!}{(m+2k-1)!!}\times\left[\frac{2(2k)}{O_{2k-1}^2}I_1^{(2k)}\right]^{\frac{m+2k-1}{2k}},\quad m\text{ 为偶数}, \tag{7.5.55}$$

$$I_m^{(2k+1)}(R)=O_{2k}2^{m+k-1}\pi^{k}\cdot\frac{m!!}{(m+2k)!!}\times\left[\frac{2(2k+1)}{O_{2k}^2}I_1^{(2k+1)}\right]^{\frac{m+2k}{2k+1}},\quad \text{对一切 } m. \tag{7.5.56}$$

有了这些结果，运用第 1 段定理 3 便完成了本定理的证明.

当 $n=2$ 时，(WR) 即(7.5.5)～(7.5.8)；当 $n=3$ 时，(WR) 即 (W).

关于弦幂积分，Blaschke 曾就 2 维情形提出这样一个问题：一实序列 $\{I_m\}$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 是凸集的弦幂积分序列的充要条件是什么？这个问题迄今尚未解决.

本章参考文献

[1] L. A. Santaló, «Integral Geometry and Geometric Probability», Addison-Wesley Publishing Company, 1976.

[2] S. D. Wicksell, "The corpuscle problem", Part I. Biometrika 17, 84～99. Part II. Biometrika 18, 151～172.

[3] W. Blaschke, «Kreis und Kugel», Berlin, 1956(有中译本.苏步青译，上海科

学技术出版社).

[4] 张高勇,一个凸体包含另一个凸体的充分条件,待发表.

[5] 苏步青、胡和生等,《微分几何》,人民教育出版社,1979.

[6] Ren Delin(任德麟), "Two topics in integral geometry", Proceedings of the 1981 symposium on differential geometry and differential equations (Shanghai–Hefei), Science Press, Beijing, China, 1984, 309~333.

[7] Ren Delin and Zhang Gaoyong (任德麟、张高勇), "On a type of integral geometric method in the study of geometric probability", DD_6 Symposium, 1985.

[8] 吴大任,"关于凸集弦幂积分的一组等周不等式", 南开大学学报(自然科学版), **1**(1985), 1~6.

[9] T. Carlemann,"Über eine isoperimetrische Aufgabe und ihre physikalischen Anwendungen", Math. Z. 3(1916), 1~7.

[10] Ta-Jen Wu(吴大任), "Über geometrische Wahrscheinlichkeiten", Wuhan University Journal of science, 1940.

名 词 索 引

八　画

九　画

十　画

十一画

十二画

十三画

十四画